Bases da Matemática e Estatística para Ciências do Mar

Modelos Matemáticos: polinômios

Docentes: Fabio Cop Ferreira e William R. P. Conti

DCMar - IMar/Unifesp

1º semestre letivo

Sumário desta Aula

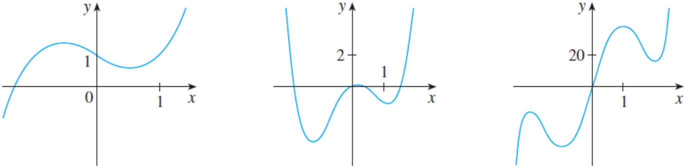
Definição

Uma função p é denominada ***polinômio*** *se*

$$p(x) = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \cdots + \beta_{n-1} x^{n-1} + \beta_n x^n,$$

em que n é um inteiro não negativo e os números $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_n$ são constantes chamadas ***coeficientes do polinômio****.*

O domínio de qualquer polinômio é $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$. Se o coeficiente dominante $\beta_n \neq 0$, então o **grau** do polinômio é n.



(a) $y = x^3 - x + 1$ (b) $y = x^4 - 3x^2 + x$ (c) $y = 3x^5 - 25x^3 + 60x$

Exemplo 1. A seguir são mostrados dados do nível médio do mar (ou GMSL, do inglês "global mean sea level"), medidos em milímetros, de 1993 a 2021, sendo a linha cheia azul o modelo de regressão quadrático que os descreve:

$$h(t) = 190760,397 - 193,386t + 0,049t^2.$$

Modelo quadrático: `https://www.geogebra.org/calculator/bvr4rycd`

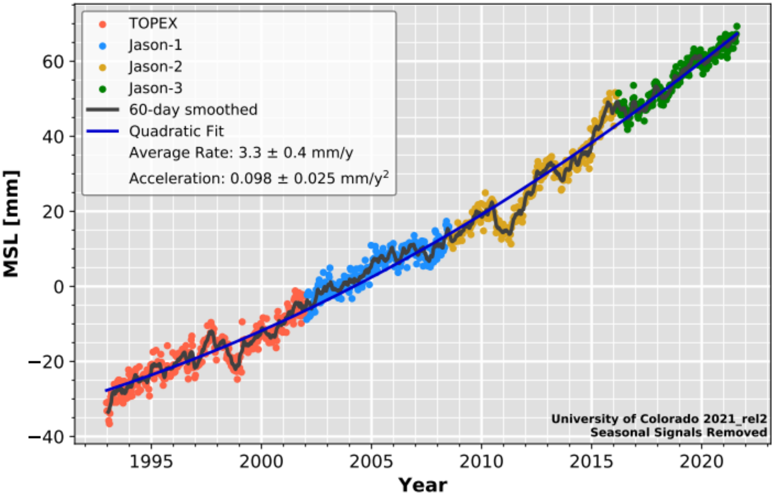


Figura: Retirada de `https://sealevel.colorado.edu/`.

(a) Utilize o modelo de regressão quadrático para estimar o nível médio do mar em 2010 e predizer o nível para o ano de 2022.

(b) De acordo com esse modelo, quando o nível médio do mar excederá 80 mm?

(c) De acordo com esse modelo, qual é a taxa média de variação do nível médio do mar com respeito ao tempo entre os anos de 1995 e 2005? E entre 2005 e 2015? E entre 2015 e 2018? E entre quaisquer dois anos? O que podemos concluir dessas contas?

(d) De acordo com esse modelo, qual é a taxa instantânea de variação do nível médio do mar com respeito ao tempo no ano 2015? E em qualquer ano? O que podemos concluir dessas contas?

(e) De acordo com esse modelo, qual é a taxa instantânea de variação da taxa instantânea de variação do nível médio do mar com respeito ao tempo em qualquer ano? O que podemos concluir dessas contas?

Apêndice

Respostas:

(a) $h(2010) \approx 19,4\,\mathrm{mm}$ e $h(2022) \approx 69,6\,\mathrm{mm}$.

(b) $h(t) = 190760,397 - 193,386t + 0,049t^2 > 80 \quad \Leftrightarrow \quad t > t_+ \approx 2024,129 \approx$ segundo mês de 2024, em que t_+ corresponde à solução positiva obtida pela Fórmula de Bhaskara:

$$t_\pm = \frac{-(-193,386) \pm \sqrt{(-193,386)^2 - 4(0,049)(190760,397 - 80)}}{2(0,049)}$$

(c) $\dfrac{\Delta h}{\Delta t} = \dfrac{h(2005) - h(1995)}{2005 - 1995} = 2,614\,\dfrac{\mathrm{mm}}{\mathrm{ano}} \qquad \dfrac{\Delta h}{\Delta t} = \dfrac{h(2015) - h(2005)}{2015 - 2005} = 3,594\,\dfrac{\mathrm{mm}}{\mathrm{ano}}$

$$\begin{aligned}\frac{\Delta h}{\Delta t} &= \frac{h(t_2) - h(t_1)}{t_2 - t_1} \\ &= \frac{(190760,397 - 193,386t_2 + 0,049t_2^2) - (190760,397 - 193,386t_1 + 0,049t_1^2)}{t_2 - t_1} \\ &= \frac{-193,386(t_2 - t_1) + 0,049(t_2^2 - t_1^2)}{t_2 - t_1} \\ &= -193,386 + 0,049(t_2 + t_1)\,\frac{\mathrm{mm}}{\mathrm{ano}}. \qquad (1)\end{aligned}$$

Conclui-se que a taxa média de variação do nível médio do mar com respeito ao tempo não é constante e depende linearmente da soma dos instantes envolvidos, sendo que o coeficiente linear é igual àquele que multiplica t no modelo quadrático, e o coeficiente angular é igual ao dobro daquele que multiplica t^2 no modelo quadrático. (Isso é sempre verdade para modelos quadráticos?)

(d) Após a leitura do Apêndice, e tomando $t_1 = 2015$ e $t_2 = 2015 + \Delta t$ na equação (1), vemos que

$$\begin{aligned} h'(2015) &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{h(2015 + \Delta t) - h(2015)}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \to 0} [-193,386 + 0,049((2015 + \Delta t) + 2015)] \\ &= \lim_{\Delta t \to 0} [-193,386 + 0,049 \cdot 2 \cdot 2015 + 0,049\Delta t] \\ &= [-193,386 + 0,049 \cdot 2 \cdot 2015] = 4,084 \, \frac{\mathrm{mm}}{\mathrm{ano}}. \end{aligned}$$

De forma análoga, vemos que

$$\begin{aligned} h'(t) &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{h(t + \Delta t) - h(t)}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \to 0} [-193,386 + 0,049((t + \Delta t) + t)] \\ &= \lim_{\Delta t \to 0} [-193,386 + 0,049 \cdot 2t + 0,049\Delta t] \\ &= [-193,386 + 0,049 \cdot 2t] = -193,386 + 0,098t \, \frac{\mathrm{mm}}{\mathrm{ano}}. \end{aligned}$$

Conclui-se que a taxa instantânea de variação do nível médio do mar com respeito ao tempo não é constante e depende linearmente do instante envolvido, sendo que o coeficiente linear é igual àquele que multiplica t no modelo quadrático, e o coeficiente angular é igual ao dobro daquele que multiplica t^2 no modelo quadrático. (Isso é sempre verdade para modelos quadráticos?)

(e) Semelhantemente ao que fizemos no item (d), temos que

$$\begin{aligned} h''(t) &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{h'(t+\Delta t) - h'(t)}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{(-193,386 + 0,098(t+\Delta t)) - (-193,386 + 0,098t)}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{0,098\Delta t}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \to 0} 0,098 = 0,098 \, \frac{\mathrm{mm}}{\mathrm{ano}^2}. \end{aligned}$$

Conclui-se que a taxa instantânea de variação da taxa instantânea de variação do nível médio do mar com respeito ao tempo é constante e igual ao dobro do coeficiente que multiplica t^2 no modelo quadrático. (Isso é sempre verdade para modelos quadráticos?)

Exemplo 2. Uma bola é solta a partir do posto de observação no topo da Torre CN, 450 m acima do chão, e sua altura *h* acima do solo é registrada em intervalos de 1 segundo na tabela abaixo.

tempo (s)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
altura (m)	450	445	431	408	375	332	279	216	143	61

Diagrama de dispersão: `https://www.geogebra.org/calculator/tjc42zb4`

Esse modelo é inteiramente empírico?

Aprendizado (2)

Um modelo quadrático é definido por uma parábola, isto é, uma função do tipo

$$y = f(x) = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2,$$

em que $\beta_0, \beta_1, \beta_2$ *são constantes, com* $\beta_2 \neq 0$*. A derivada de* f *(taxa instantânea de variação de* f *com respeito a* x*) é dada por*

$$f'(x) = \beta_1 + 2\beta_2 x.$$

A segunda derivada de f *(taxa instantânea de variação da taxa instantânea de variação de* f *com respeito a* x*) é dada por*

$$f''(x) = 2\beta_2.$$

De maneira geral, temos

Aprendizado (3)

Um modelo polinomial de grau n (um inteiro não negativo) é definido por uma função do tipo

$$y = f(x) = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \cdots + \beta_{n-1} x^{n-1} + \beta_n x^n,$$

em que $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_n$ *são constantes, com* $\beta_n \neq 0$*. A derivada de f (taxa instantânea de variação de f com respeito a x) é dada por*

$$f'(x) = \beta_1 + 2\beta_2 x + 3\beta_3 x^2 + \cdots + (n-1)\beta_{n-1} x^{n-2} + n\beta_n x^{n-1}.$$

A segunda derivada de f (taxa instantânea de variação da taxa instantânea de variação de f com respeito a x) é dada por

$$f''(x) = 2\beta_2 + 3 \cdot 2\beta_3 x + \cdots + (n-1)(n-2)\beta_{n-1} x^{n-3} + n(n-1)\beta_n x^{n-2}.$$

Suponha que uma quantidade y dependa de outra quantidade x. Portanto, y é uma função de x e escrevemos $y = f(x)$. Se x varia de x_1 para x_2, então a variação de x (também chamado de **incremento** de x) é

$$\Delta x = x_2 - x_1,$$

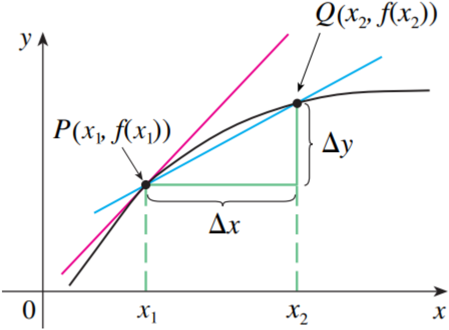
e a correspondente variação em y é

$$\Delta y = f(x_2) - f(x_1).$$

O quociente de diferença

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

é chamado de **taxa média de variação de** y **com respeito a** x sobre o intervalo $[x_1, x_2]$, e pode ser interpretado como a inclinação da reta secante PQ da figura a seguir.



Consideramos agora a taxa média de variação sobre intervalos cada vez menores: fazemos x_2 se aproximar de x_1, e portanto Δx se aproxima de 0. O limite dessas taxas médias de variação é chamado de **taxa (instantânea) de variação de** y **com respeito a** x em $x = x_1$, e é interpretado como a inclinação da reta tangente à curva $y = f(x)$ em $P(x_1, f(x_1))$:

$$\text{taxa de variação instantânea} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}.$$

Limites dessa forma surgem quando calculamos a taxa de variação em qualquer das ciências ou engenharia ou economia, e uma vez que ocorre tão vastamente, é dado a ele um nome especial e uma notação:

Definição

A derivada de uma função f em um número x_1, denotada por $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=x_1}$ ou $f'(x_1)$, é definida por

$$f'(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

se esse limite existe.

Por meio dessa definição é possível chegar-se às seguintes interpretações:

Interpretação (1)

A derivada $f'(x_1)$ é a taxa instantânea de variação de $y = f(x)$ com respeito a x quando $x = x_1$.

Interpretação (2)

A reta tangente a $y = f(x)$ em $(x_1, f(x_1))$ é a reta que passa pelo ponto $(x_1, f(x_1))$ e cuja inclinação é igual a $f'(x_1)$, a derivada de f em x_1.

Exemplo do processo limite. https://www.geogebra.org/calculator/w6twvfzd

Acima, consideramos a derivada de uma função f em um número dado (fixo) x_1: $f'(x_1)$. Mas podemos permitir que esse número x_1 varie: voltando à definição de $f'(x_1)$ e trocando x_1 pela variável x, obtemos

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Então, dado um número x qualquer tal que o limite acima exista, atribuímos a esse x o valor $f'(x)$. Consideramos portanto $f'(x)$ definida acima como uma nova função, chamada de **derivada de** f, e fazemos a seguinte observação: pelo que aprendemos anteriormente, o valor de f' em x, $f'(x)$, pode ser interpretado geometricamente como a inclinação da reta tangente ao gráfico de f no ponto $(x, f(x))$.

Exemplo de gráfico de f e f'. https://www.geogebra.org/calculator/sfmmfdcv

voltar

- $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$
- $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$ e $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$
- $a^4 - b^4 = (a-b)(a^3 + a^2 b + ab^2 + b^3)$
- $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2} b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1})$, em que n é um inteiro positivo qualquer

Aprendizado (1)

Um modelo linear é definido por uma reta, isto é, uma função do tipo

$$y = f(x) = \beta_0 + \beta_1 x,$$

em que β_0 é chamado de coeficiente linear da reta (a intersecção com o eixo y) e β_1 chamado de coeficiente angular da reta (inclinação). A derivada de f (taxa instantânea de variação de f com respeito a x) é constante e igual a β_1, isto é, $f'(x) = \beta_1$. A segunda derivada de f (taxa instantânea de variação da taxa instantânea de variação de f com respeito a x) é constante e igual a 0 (zero), isto é, $f''(x) = 0$.

Referências

[1] James Stewart, “Cálculo”. Vol. 1, Tradução da 9ª edição norte-americana. Editora Cengage Learning.

[2] Hamilton Luiz Guidorizzi, “Um Curso de Cálculo”, Vol. 1, 5ª edição. Editora LTC, 2001.