Bases da Matemática e Estatística para Ciências do Mar

Modelos Matemáticos: novas funções a partir de conhecidas

Docentes: Fabio Cop Ferreira e William R. P. Conti

DCMar - IMar/Unifesp

1º semestre letivo

Sumário desta Aula

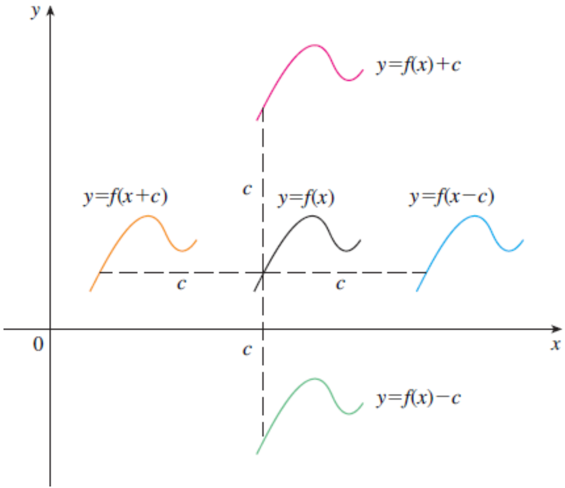
Transformações de Funções

Vamos considerar inicialmente as **translações verticais e horizontais**.

Suponha $c > 0$. Para obter o gráfico de

- $y = f(x) + c$, desloque o gráfico de $y = f(x)$ em c unidades para cima.
- $y = f(x) - c$, desloque o gráfico de $y = f(x)$ em c unidades para baixo.
- $y = f(x - c)$, desloque o gráfico de $y = f(x)$ em c unidades para a direita.
- $y = f(x + c)$, desloque o gráfico de $y = f(x)$ em c unidades para a esquerda.

Transformações de Funções



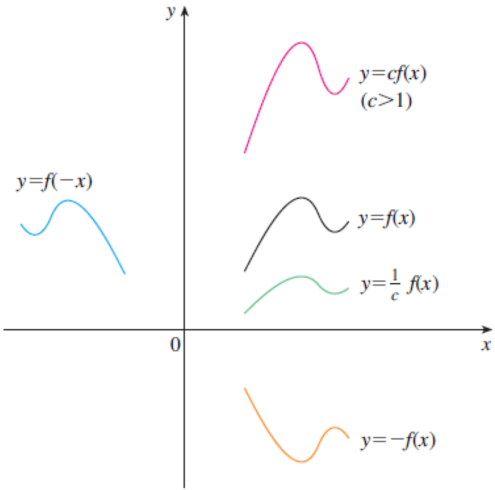
Transformações de Funções

Vamos considerar agora as **expansões e reflexões verticais e horizontais**.

Suponha $c > 1$. Para obter o gráfico de

- $y = cf(x)$, expanda o gráfico de $y = f(x)$ verticalmente por um fator c.
- $y = \dfrac{1}{c}f(x)$, comprima o gráfico de $y = f(x)$ verticalmente por um fator c.
- $y = f(cx)$, comprima o gráfico de $y = f(x)$ horizontalmente por um fator c.
- $y = f(x/c)$, expanda o gráfico de $y = f(x)$ horizontalmente por um fator c.
- $y = -f(x)$, reflita o gráfico de $y = f(x)$ em torno do eixo x.
- $y = f(-x)$, reflita o gráfico de $y = f(x)$ em torno do eixo y.

Transformações de Funções



Visualização de transformações de funções: https://www.geogebra.org/calculator/kwjktef5

Combinações de Funções

Duas funções f e g podem ser combinadas para formar novas funções $f+g$, $f-g$, fg e f/g de forma similar àquela pela qual somamos, subtraímos, multiplicamos e dividimos números reais.

Definição

*Dadas duas funções f e g, as funções de **soma**, **diferença**, **produto** e **quociente** são definidas por*

1. $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$
2. $(f-g)(x) = f(x) - g(x)$
3. $(fg)(x) = f(x)g(x)$
4. $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$

Combinações de Funções

Existe outra maneira de combinar duas funções para obter uma nova função. Por exemplo, suponha que $y = f(u) = \sqrt{u}$ e $u = g(x) = x^2 + 1$. Como y é uma função de u, e u, por sua vez, é uma função de x, segue que, afinal de contas, y é uma função de x. Computamos isso pela substituição:

$$y = f(u) = f(g(x)) = f(x^2 + 1) = \sqrt{x^2 + 1}.$$

Este procedimento é chamado *composição*, pois a nova função é *composta* das duas funções dadas f e g.

Definição

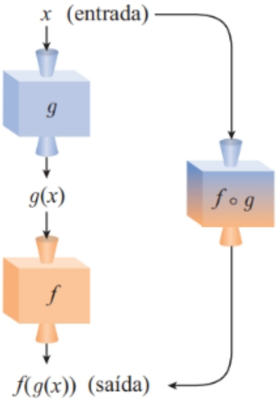
Dadas duas funções f e g, a ***função composta*** *$f \circ g$ (também chamada de* ***composição*** *de f e g) é definida por*

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)).$$

O domínio é o conjunto de todos os x no domínio de g tais que $g(x)$ está no domínio de f. Em outras palavras, $(f \circ g)(x)$ está definida sempre que tanto $g(x)$ quanto $f(g(x))$ estiverem definidas.

Combinações de Funções

A figura abaixo mostra como visualizar $f \circ g$ em termos de máquinas.



Combinações de Funções

Exemplo 1. Se $f(x) = x^2$ e $g(x) = x - 3$, encontre as funções compostas $f \circ g$ e $g \circ f$.

Exemplo 2. Se $f(x) = \sqrt{x}$ e $g(x) = \sqrt{2-x}$, encontre cada uma das funções e seus domínios.

$(a)\; f \circ g \qquad (b)\; g \circ f \qquad (c)\; f \circ f \qquad (d)\; g \circ g$

Respostas:

1. $(f \circ g)(x) = (x-3)^2$ e $(g \circ f)(x) = x^2 - 3$.

2.(a) $(f \circ g)(x) = \sqrt[4]{2-x}$, e seu domínio é $\{x : x \leq 2\} = (-\infty, 2]$.

2.(b) $(g \circ f)(x) = \sqrt{2 - \sqrt{x}}$, e seu domínio é $[0, 4]$. se $0 \leq a \leq b$, então $a^2 \leq b^2$

2.(c) $(f \circ f)(x) = \sqrt[4]{x}$, e seu domínio é $[0, \infty)$.

2.(d) $(g \circ g)(x) = \sqrt{2 - \sqrt{2-x}}$, e seu domínio é $[-2, 2]$.

Suponha que uma quantidade y dependa de outra quantidade x. Portanto, y é uma função de x e escrevemos $y = f(x)$. Se x varia de x_1 para x_2, então a variação de x (também chamado de **incremento** de x) é

$$\Delta x = x_2 - x_1,$$

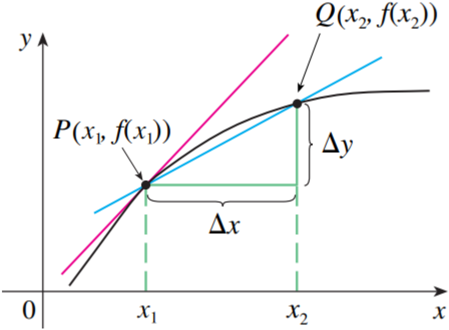
e a correspondente variação em y é

$$\Delta y = f(x_2) - f(x_1).$$

O quociente de diferença

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

é chamado de **taxa média de variação de** y **com respeito a** x sobre o intervalo $[x_1, x_2]$, e pode ser interpretado como a inclinação da reta secante PQ da figura a seguir.



Consideramos agora a taxa média de variação sobre intervalos cada vez menores: fazemos x_2 se aproximar de x_1, e portanto Δx se aproxima de 0. O limite dessas taxas médias de variação é chamado de **taxa (instantânea) de variação de y com respeito a** x em $x = x_1$, e é interpretado como a inclinação da reta tangente à curva $y = f(x)$ em $P(x_1, f(x_1))$:

$$\text{taxa de variação instantânea} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}.$$

Limites dessa forma surgem quando calculamos a taxa de variação em qualquer das ciências ou engenharia ou economia, e uma vez que ocorre tão vastamente, é dado a ele um nome especial e uma notação:

Definição

A derivada de uma função f em um número x_1, denotada por $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_1}$ ou $f'(x_1)$, é definida por

$$f'(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

se esse limite existe.

Por meio dessa definição é possível chegar-se às seguintes interpretações:

Interpretação (1)

A derivada $f'(x_1)$ é a taxa instantânea de variação de $y = f(x)$ com respeito a x quando $x = x_1$.

Interpretação (2)

A reta tangente a $y = f(x)$ em $(x_1, f(x_1))$ é a reta que passa pelo ponto $(x_1, f(x_1))$ e cuja inclinação é igual a $f'(x_1)$, a derivada de f em x_1.

Exemplo do processo limite. https://www.geogebra.org/calculator/w6twvfzd

Acima, consideramos a derivada de uma função f em um número dado (fixo) x_1: $f'(x_1)$. Mas podemos permitir que esse número x_1 varie: voltando à definição de $f'(x_1)$ e trocando x_1 pela variável x, obtemos

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Então, dado um número x qualquer tal que o limite acima exista, atribuímos a esse x o valor $f'(x)$. Consideramos portanto $f'(x)$ definida acima como uma nova função, chamada de **derivada de** f, e fazemos a seguinte observação: pelo que aprendemos anteriormente, o valor de f' em x, $f'(x)$, pode ser interpretado geometricamente como a inclinação da reta tangente ao gráfico de f no ponto $(x, f(x))$.

Exemplo de gráfico de f e f'. https://www.geogebra.org/calculator/sfmmfdcv

Intervalos de Crescimento e de Decrescimento

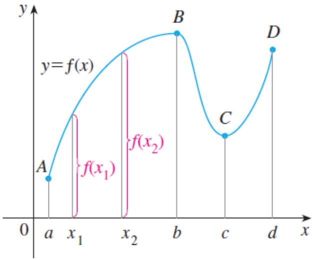
Definição (função crescente/decrescente)

*Uma função f é dita ser **crescente** em um intervalo I se, quaisquer que sejam x_1 e x_2 em I,*

$$x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) < f(x_2).$$

*Analogamente, f é dita ser **decrescente** em I se, quaisquer que sejam x_1 e x_2 em I,*

$$x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) > f(x_2).$$



Pontos de Máximo e Pontos de Mínimo

Definição (máximo/mínimo absoluto)

Seja c um número pertencente ao domínio D de uma função f. Então $f(c)$ é o valor

(*i*) ***máximo absoluto*** *de f sobre D se $f(x) \leq f(c)$ para todo x em D.*

(*ii*) ***mínimo absoluto*** *de f sobre D se $f(x) \geq f(c)$ para todo x em D.*

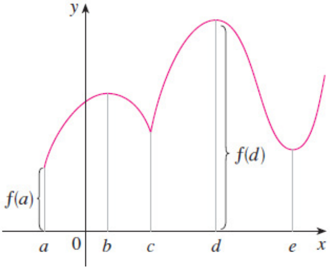
Definição (máximo/mínimo local)

Seja c um número pertencente ao domínio D de uma função f. Então $f(c)$ é o valor

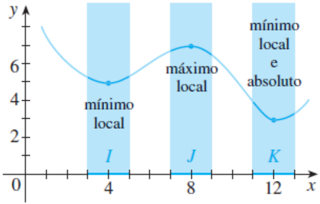
(*i*) ***máximo local*** *de f sobre D se $f(x) \leq f(c)$ quando x é próximo de c.*

(*ii*) ***mínimo local*** *de f sobre D se $f(x) \geq f(c)$ quando x é próximo de c.*

Pontos de Máximo e Pontos de Mínimo



mínimo absoluto: $f(a)$
máximo absoluto: $f(d)$
mínimos locais: $f(c)$, $f(e)$
máximos locais: $f(b)$, $f(d)$



Concavidades e Pontos de Inflexão

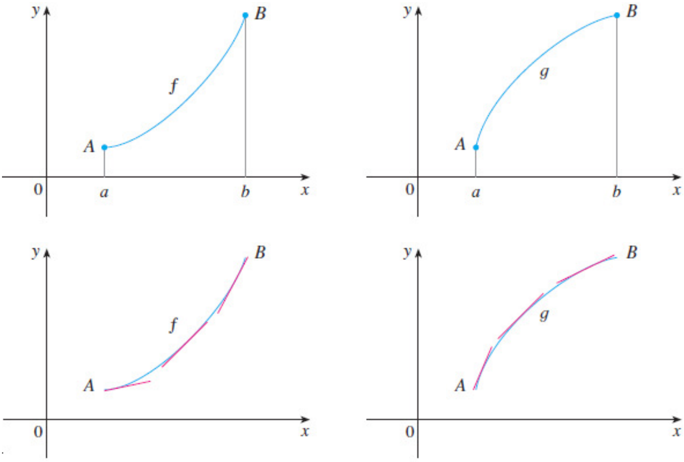
Definição (concavidade)

Se o gráfico de uma função f encontra-se ***acima*** *de todas as retas tangentes a ele para argumentos pertencentes a um intervalo I, então dizemos que f tem* ***concavidade para cima*** *no intervalo I. Se o gráfico de uma função f encontra-se* ***abaixo*** *de todas as retas tangentes a ele para argumentos pertencentes a um intervalo I, então dizemos que f tem* ***concavidade para baixo*** *no intervalo I.*

Definição (ponto de inflexão)

Um ponto P em uma curva $y = f(x)$ é dito ser um ***ponto de inflexão*** *se f é contínua aí e a curva muda de concavidade em P.*

Concavidades e Pontos de Inflexão



(a) Côncava para cima

(b) Côncava para baixo

O que f' diz sobre f?

Teorema (teste de crescimento/decrescimento)

Seja f uma função contínua em $[a, b]$ e diferenciável em (a, b).

(a) *Se $f'(x) > 0$ para todo x em (a, b), então f é crescente em (a, b).*

(b) *Se $f'(x) < 0$ para todo x em (a, b), então f é decrescente em (a, b).*

Definição (número crítico)

*Um **número crítico** de uma função f é um número c no domínio de f tal que, ou bem $f'(c) = 0$, ou bem $f'(c)$ não existe.*

O que f' diz sobre f?

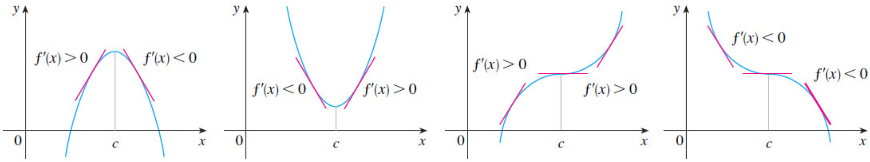
Teorema (teste da primeira derivada)

Suponha que c é um número crítico de uma função contínua f.

(a) *Se f' muda de positiva para negativa em c, então f tem um máximo local em c.*

(b) *Se f' muda de negativa para positiva em c, então f tem um mínimo local em c.*

(c) *Se f' não muda de sinal em c, então f não tem um máximo ou mínimo local em c.*



(a) Máximo local (b) Mínimo local (c) Nem máximo, nem mínimo (d) Nem mínimo, nem máximo

O que f” diz sobre f?

Teorema (teste de concavidade)

Seja f uma função que admite derivada até a segunda ordem no intervalo (a, b).

(a) *Se $f''(x) > 0$ para todo x em (a, b), então f terá concavidade para cima em (a, b).*

(b) *Se $f''(x) < 0$ para todo x em (a, b), então f terá concavidade para baixo em (a, b).*

Exemplo. Estude $f(x) = e^{-x^2/2}$ com relação à concavidade e determine os pontos de inflexão.

Solução. Pelo teste apresentado, devemos estudar o sinal da função

$$f''(x) = (x^2 - 1)e^{-x^2/2}.$$

Conclui-se que f tem concavidade para cima em $(-\infty, -1)$ e $(1, \infty)$, e concavidade para baixo em $(-1, 1)$. Os pontos de inflexão são $P_1 = (-1, f(-1)) = (-1, e^{-1/2})$ e $P_2 = (1, f(1)) = (1, e^{-1/2})$.

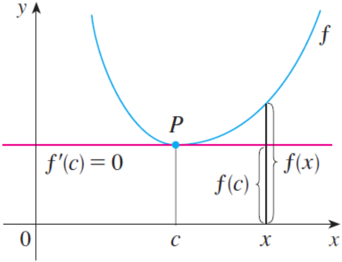
O que f” diz sobre f?

Teorema (teste da segunda derivada)

Suponha que f'' é contínua nas proximidades de c.

(a) *Se $f'(c) = 0$ e $f''(c) > 0$, então f tem um mínimo local em c.*

(b) *Se $f'(c) = 0$ e $f''(c) < 0$, então f tem um máximo local em c.*



$f''(c) > 0$, f é côncavo para cima

- $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$
- $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$ e $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2)$
- $a^4 - b^4 = (a-b)(a^3+a^2b+ab^2+b^3)$
- $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1})$, em que n é um inteiro positivo qualquer
- $\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b)+\sin(b)\cos(a)$ e $\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b)-\sin(b)\cos(a)$
- $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b)-\sin(a)\sin(b)$ e $\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b)+\sin(a)\sin(b)$
- $\tan(a+b) = \dfrac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)}$ e $\tan(a-b) = \dfrac{\tan(a)-\tan(b)}{1+\tan(a)\tan(b)}$
- $\sin^2(x)+\cos^2(x) = 1$ para qualquer x

Aprendizado (1)

Um modelo linear é definido por uma reta, isto é, uma função do tipo

$$y = f(x) = \beta_0 + \beta_1 x,$$

em que β_0 é chamado de coeficiente linear da reta (a intersecção com o eixo y) e β_1 chamado de coeficiente angular da reta (inclinação). A derivada de f (taxa instantânea de variação de f com respeito a x) é constante e igual a β_1, isto é, $f'(x) = \beta_1$. A segunda derivada de f (taxa instantânea de variação da taxa instantânea de variação de f com respeito a x) é constante e igual a 0 (zero), isto é, $f''(x) = 0$.

Aprendizado (2)

Um modelo quadrático é definido por uma parábola, isto é, uma função do tipo

$$y = f(x) = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2,$$

em que $\beta_0, \beta_1, \beta_2$ *são constantes, com* $\beta_2 \neq 0$*. A derivada de* f *(taxa instantânea de variação de* f *com respeito a* x*) é dada por*

$$f'(x) = \beta_1 + 2\beta_2 x.$$

A segunda derivada de f *(taxa instantânea de variação da taxa instantânea de variação de* f *com respeito a* x*) é dada por*

$$f''(x) = 2\beta_2.$$

Aprendizado (3)

Um modelo polinomial de grau n (um inteiro não negativo) é definido por uma função do tipo

$$y = f(x) = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \cdots + \beta_{n-1} x^{n-1} + \beta_n x^n,$$

em que $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_n$ *são constantes, com* $\beta_n \neq 0$. *A derivada de f (taxa instantânea de variação de f com respeito a x) é dada por*

$$f'(x) = \beta_1 + 2\beta_2 x + 3\beta_3 x^2 + \cdots + (n-1)\beta_{n-1} x^{n-2} + n\beta_n x^{n-1}.$$

A segunda derivada de f (taxa instantânea de variação da taxa instantânea de variação de f com respeito a x) é dada por

$$f''(x) = 2\beta_2 + 3 \cdot 2\beta_3 x + \cdots + (n-1)(n-2)\beta_{n-1} x^{n-3} + n(n-1)\beta_n x^{n-2}.$$

Aprendizado (4)

Um modelo de lei de potência é definido por uma função do tipo

$$y = f(x) = cx^k,$$

em que c e k são constantes. A derivada de f (taxa instantânea de variação de f com respeito a x) é dada por

$$f'(x) = kcx^{k-1}.$$

A segunda derivada de f (taxa instantânea de variação da taxa instantânea de variação de f com respeito a x) é dada por

$$f''(x) = k(k-1)cx^{k-2}.$$

Aprendizado (5)

Um modelo cossenoidal é definido por uma função do tipo

$$y = f(x) = A\cos(kx),$$

em que A e k são constantes. A derivada de f (taxa instantânea de variação de f com respeito a x) é dada por

$$f'(x) = -kA\sin(kx).$$

A segunda derivada de f (taxa instantânea de variação da taxa instantânea de variação de f com respeito a x) é dada por

$$f''(x) = -k^2 A\cos(kx) = -k^2 f(x).$$

Aprendizado (6)

Um modelo senoidal é definido por uma função do tipo

$$y = f(x) = A\sin(kx),$$

em que A e k são constantes. A derivada de f (taxa instantânea de variação de f com respeito a x) é dada por

$$f'(x) = kA\cos(kx).$$

A segunda derivada de f (taxa instantânea de variação da taxa instantânea de variação de f com respeito a x) é dada por

$$f''(x) = -k^2 A\sin(kx) = -k^2 f(x).$$

Aprendizado (7)

Um modelo exponencial é definido por uma função do tipo

$$y = f(x) = y_0 b^x,$$

em que y_0 *e* b *são constantes, com* $b > 0$*. A derivada de* f *(taxa instantânea de variação de* f *com respeito a* x*) é dada por*

$$f'(x) = \ln(b) y_0 b^x = \ln(b) f(x).$$

A segunda derivada de f *(taxa instantânea de variação da taxa instantânea de variação de* f *com respeito a* x*) é dada por*

$$f''(x) = \ln^2(b) y_0 b^x = \ln^2(b) f(x).$$

Alternativamente, temos

Aprendizado (8)

Um modelo exponencial é definido por uma função do tipo

$$y = f(x) = y_0 e^{kx},$$

em que y_0 *e* k *são constantes. A derivada de* f *(taxa instantânea de variação de* f *com respeito a* x*) é dada por*

$$f'(x) = ky_0 e^{kx} = kf(x).$$

A segunda derivada de f *(taxa instantânea de variação da taxa instantânea de variação de* f *com respeito a* x*) é dada por*

$$f''(x) = k^2 y_0 e^{kx} = k^2 f(x).$$

Aprendizado (9)

As funções logarítmicas são da forma

$$y = f(x) = \log_b(x),$$

em que a base b é uma constante positiva. A derivada de f (taxa instantânea de variação de f com respeito a x) é dada por

$$f'(x) = \frac{1}{x\ln(b)}.$$

A segunda derivada de f (taxa instantânea de variação da taxa instantânea de variação de f com respeito a x) é dada por

$$f''(x) = -\frac{1}{x^2\ln(b)}.$$

Referências

[1] James Stewart, “Cálculo”. Vol. 1, Tradução da 9ª edição norte-americana. Editora Cengage Learning.

[2] Hamilton Luiz Guidorizzi, “Um Curso de Cálculo”, Vol. 1, 5ª edição. Editora LTC, 2001.