Bases da Matemática e Estatística para Ciências do Mar
Modelos Matemáticos: funções trigonométricas

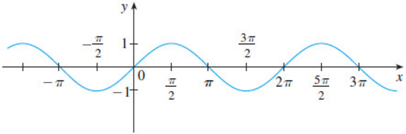
Docentes: Fabio Cop Ferreira e William R. P. Conti

DCMar - IMar/Unifesp

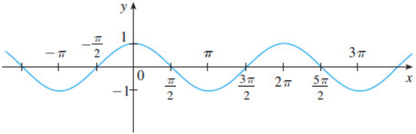
1º semestre letivo

Sumário desta Aula

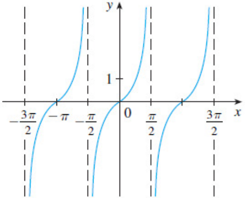
Em cálculo, convenciona-se dar a medida de ângulos em *radianos* (exceto quando explicitamente mencionado). Assim, por exemplo, quando utilizamos as funções $\sin(x)$, $\cos(x)$ e $\tan(x)$, entende-se que seja o seno, o cosseno e a tangente de um ângulo cuja medida em radianos é x.



$f(x)=\text{sen}\,x$



$f(x)=\cos x$



$f(x)=\text{tg}\,x$

Observe que tanto para a função seno quanto para a função cosseno o domínio é $(-\infty, \infty)$, e a imagem é o intervalo fechado $[-1, 1]$. Dessa forma, para todos os valores de x temos

$$-1 \leq \sin(x) \leq 1 \qquad \text{e} \qquad -1 \leq \cos(x) \leq 1.$$

Uma propriedade importante das funções seno e cosseno é que elas são periódicas e têm um período 2π. Isso significa que, para todos os valores de x,

$$\sin(x + 2\pi) = \sin(x) \qquad \text{e} \qquad \cos(x + 2\pi) = \cos(x).$$

A natureza periódica dessas funções torna-as adequadas à modelagem de fenômenos repetitivos, tais como marés, cordas vibrantes e ondas.

A função tangente relaciona-se com as funções seno e cosseno pela equação

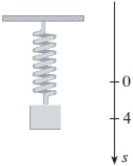
$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)},$$

de forma que ela não está definida quando $\cos(x) = 0$, isto é, quando $x = \pm\pi/2, \pm 3\pi/2, \ldots$. Sua imagem é $(-\infty, \infty)$. Observe que a função tangente tem período π: para todos os valores de x vale

$$\tan(x + \pi) = \tan(x).$$

As três funções trigonométricas remanescentes (cossecante, secante e cotangente) são as recíprocas das funções seno, cosseno e tangente, respectivamente.

Exemplo 1. Um objeto de massa $m = 250\,\mathrm{g}$ é preso na extremidade de uma mola vertical de constante $k = 9\,\mathrm{N/m}$. Após esse sistema atingir a posição de equilíbrio, o objeto é esticado $4\,\mathrm{cm}$ além dessa posição, em repouso, e solto no tempo $t = 0\,\mathrm{s}$ - veja a figura abaixo e observe que o sentido positivo é posto para baixo.



Sua posição no tempo t é dada pela função

$$s(t) = 4\cos(6t).$$

(a) Faça um estudo desse movimento por meio do laboratório virtual da Universidade do Colorado.

(b) Qual é o período do movimento?

(c) Qual é a frequência do movimento?

(d) Encontre a velocidade no tempo t.

(e) Encontre a aceleração no tempo t.

Apêndice

Respostas:

(a) Estudo da função posição: `https://www.geogebra.org/calculator/jdvdmcum`

(b) $T = \dfrac{2\pi}{6} \approx 1,047\,\mathrm{s}$

(c) $f = \dfrac{1}{T} = \dfrac{6}{2\pi} \approx 0,955\,\mathrm{s}^{-1}$ ($\mathrm{s}^{-1} = \mathrm{Hz}$, hertz)

(d) $v(t) = s'(t) = -6 \cdot 4\sin(6t) = -24\sin(6t)$

(e) $a(t) = s''(t) = -(6)^2 \cdot 4\cos(6t) = -144\cos(6t)$

Nos cálculos dos itens (d) e (e) fez-se uso dos seguintes limites especiais:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\sin(\Delta t)}{\Delta t} = 1 \qquad \text{e} \qquad \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\cos(\Delta t) - 1}{\Delta t} = 0.$$

Exemplo 2. Análise harmônica de maré.

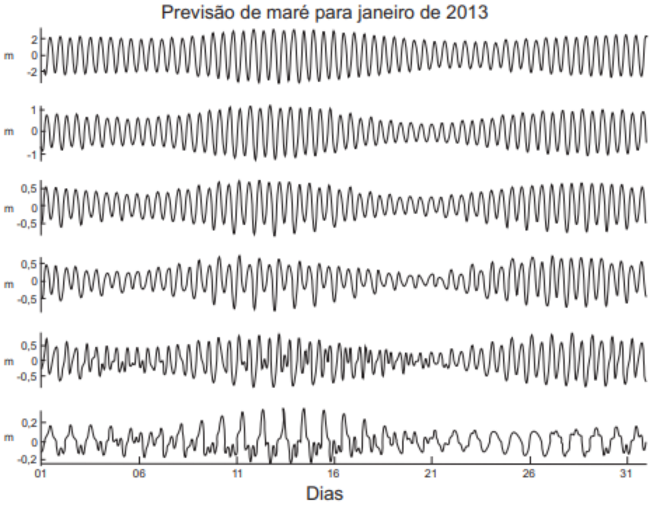


Figura 9.11 Previsões de maré para diversos portos brasileiros para o mês de janeiro de 2013. De cima para baixo: São Luís (MA), Recife (PE), Vitória (ES), Santos (SP), São Francisco do Sul (SC) e Rio Grande (RS). Observe a mudança na escala vertical entre os diferentes locais.

Figura: Retirada do livro "Introdução às Ciências do Mar", disponível gratuitamente na página da CIRM.

Quando a função a ser aproximada é periódica, é conveniente utilizar como função aproximadora um elemento de uma família de funções também periódicas, com o mesmo período da que se quer aproximar. Uma particular classe é representada pelas funções

$$1, \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right), \ldots, \cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right), \qquad \sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right), \ldots, \sin\left(\frac{2\pi nt}{T}\right).$$

Para qualquer uma dessas funções, tem-se que $f(t+T) = f(t)$.

É possível aproximar uma função periódica de período T por uma função da família

$$A_0 + \sum_{n=1}^{N} \left[A_n \cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) + B_n \sin\left(\frac{2\pi nt}{T}\right)\right]$$

pelo Método dos Mínimos Quadrados. Esta aproximação recebe o nome de **análise harmônica**, **aproximação trigonométrica** ou **aproximação de Fourier** (veja "Fourier: Construindo Ondas").

Aprendizado (5)

Um modelo cossenoidal é definido por uma função do tipo

$$y = f(x) = A\cos(kx),$$

em que A e k são constantes. A derivada de f (taxa instantânea de variação de f com respeito a x) é dada por

$$f'(x) = -kA\sin(kx).$$

A segunda derivada de f (taxa instantânea de variação da taxa instantânea de variação de f com respeito a x) é dada por

$$f''(x) = -k^2 A\cos(kx) = -k^2 f(x).$$

Aprendizado (6)

Um modelo senoidal é definido por uma função do tipo

$$y = f(x) = A\sin(kx),$$

em que A e k são constantes. A derivada de f (taxa instantânea de variação de f com respeito a x) é dada por

$$f'(x) = kA\cos(kx).$$

A segunda derivada de f (taxa instantânea de variação da taxa instantânea de variação de f com respeito a x) é dada por

$$f''(x) = -k^2A\sin(kx) = -k^2f(x).$$

Suponha que uma quantidade y dependa de outra quantidade x. Portanto, y é uma função de x e escrevemos $y = f(x)$. Se x varia de x_1 para x_2, então a variação de x (também chamado de **incremento** de x) é

$$\Delta x = x_2 - x_1,$$

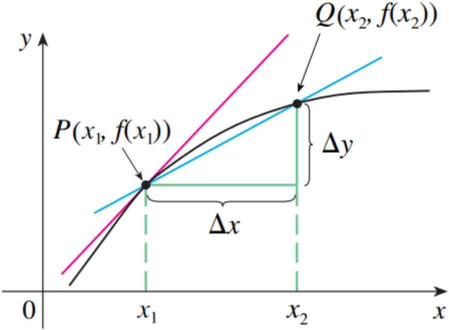
e a correspondente variação em y é

$$\Delta y = f(x_2) - f(x_1).$$

O quociente de diferença

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

é chamado de **taxa média de variação de y com respeito a x** sobre o intervalo $[x_1, x_2]$, e pode ser interpretado como a inclinação da reta secante PQ da figura a seguir.



Consideramos agora a taxa média de variação sobre intervalos cada vez menores: fazemos x_2 se aproximar de x_1, e portanto Δx se aproxima de 0. O limite dessas taxas médias de variação é chamado de **taxa (instantânea) de variação de y com respeito a** x em $x = x_1$, e é interpretado como a inclinação da reta tangente à curva $y = f(x)$ em $P(x_1, f(x_1))$:

$$\text{taxa de variação instantânea} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}.$$

Limites dessa forma surgem quando calculamos a taxa de variação em qualquer das ciências ou engenharia ou economia, e uma vez que ocorre tão vastamente, é dado a ele um nome especial e uma notação:

Definição

A derivada de uma função f em um número x_1, denotada por $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_1}$ ou $f'(x_1)$, é definida por

$$f'(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

se esse limite existe.

Por meio dessa definição é possível chegar-se às seguintes interpretações:

Interpretação (1)

A derivada $f'(x_1)$ é a taxa instantânea de variação de $y = f(x)$ com respeito a x quando $x = x_1$.

Interpretação (2)

A reta tangente a $y = f(x)$ em $(x_1, f(x_1))$ é a reta que passa pelo ponto $(x_1, f(x_1))$ e cuja inclinação é igual a $f'(x_1)$, a derivada de f em x_1.

Exemplo do processo limite. `https://www.geogebra.org/calculator/w6twvfzd`

Acima, consideramos a derivada de uma função f em um número dado (fixo) x_1: $f'(x_1)$. Mas podemos permitir que esse número x_1 varie: voltando à definição de $f'(x_1)$ e trocando x_1 pela variável x, obtemos

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Então, dado um número x qualquer tal que o limite acima exista, atribuímos a esse x o valor $f'(x)$. Consideramos portanto $f'(x)$ definida acima como uma nova função, chamada de **derivada de** f, e fazemos a seguinte observação: pelo que aprendemos anteriormente, o valor de f' em x, $f'(x)$, pode ser interpretado geometricamente como a inclinação da reta tangente ao gráfico de f no ponto $(x, f(x))$.

Exemplo de gráfico de f e f'. `https://www.geogebra.org/calculator/sfmmfdcv`

voltar

Intervalos de Crescimento e de Decrescimento

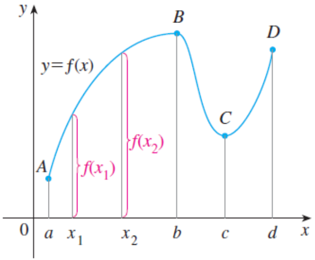
Definição (função crescente/decrescente)

Uma função f é dita ser ***crescente*** *em um intervalo I se, quaisquer que sejam x_1 e x_2 em I,*

$$x_1 < x_2 \qquad \Rightarrow \qquad f(x_1) < f(x_2).$$

Analogamente, f é dita ser ***decrescente*** *em I se, quaisquer que sejam x_1 e x_2 em I,*

$$x_1 < x_2 \qquad \Rightarrow \qquad f(x_1) > f(x_2).$$



Pontos de Máximo e Pontos de Mínimo

Definição (máximo/mínimo absoluto)

Seja c um número pertencente ao domínio D de uma função f. Então $f(c)$ é o valor

(*i*) ***máximo absoluto*** *de f sobre D se $f(x) \leq f(c)$ para todo x em D.*

(*ii*) ***mínimo absoluto*** *de f sobre D se $f(x) \geq f(c)$ para todo x em D.*

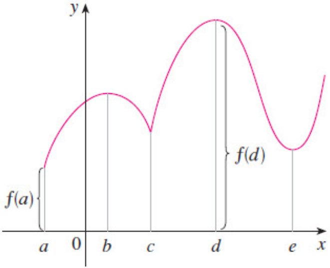
Definição (máximo/mínimo local)

Seja c um número pertencente ao domínio D de uma função f. Então $f(c)$ é o valor

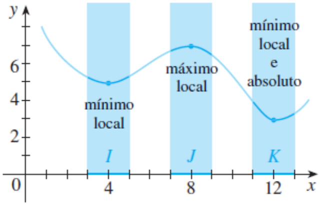
(*i*) ***máximo local*** *de f sobre D se $f(x) \leq f(c)$ quando x é próximo de c.*

(*ii*) ***mínimo local*** *de f sobre D se $f(x) \geq f(c)$ quando x é próximo de c.*

Pontos de Máximo e Pontos de Mínimo



mínimo absoluto: $f(a)$
máximo absoluto: $f(d)$
mínimos locais: $f(c)$, $f(e)$
máximos locais: $f(b)$, $f(d)$



Concavidades e Pontos de Inflexão

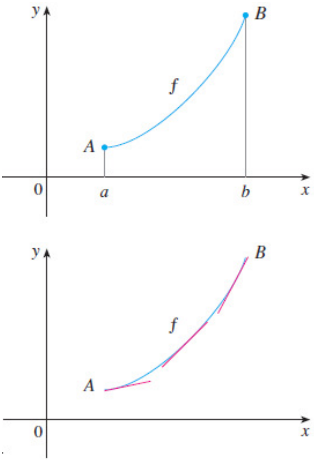
Definição (concavidade)

Se o gráfico de uma função f encontra-se ***acima*** *de todas as retas tangentes a ele para argumentos pertencentes a um intervalo I, então dizemos que f tem* ***concavidade para cima*** *no intervalo I. Se o gráfico de uma função f encontra-se* ***abaixo*** *de todas as retas tangentes a ele para argumentos pertencentes a um intervalo I, então dizemos que f tem* ***concavidade para baixo*** *no intervalo I.*

Definição (ponto de inflexão)

Um ponto P em uma curva $y = f(x)$ é dito ser um ***ponto de inflexão*** *se f é contínua aí e a curva muda de concavidade em P.*

Concavidades e Pontos de Inflexão



(a) Côncava para cima

(b) Côncava para baixo

O que f' diz sobre f?

Teorema (teste de crescimento/decrescimento)

Seja f uma função contínua em $[a, b]$ e diferenciável em (a, b).

(a) *Se $f'(x) > 0$ para todo x em (a, b), então f é crescente em (a, b).*

(b) *Se $f'(x) < 0$ para todo x em (a, b), então f é decrescente em (a, b).*

Definição (número crítico)

*Um **número crítico** de uma função f é um número c no domínio de f tal que, ou bem $f'(c) = 0$, ou bem $f'(c)$ não existe.*

O que f' diz sobre f?

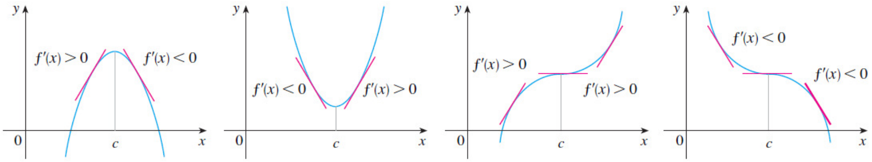
Teorema (teste da primeira derivada)

Suponha que c é um número crítico de uma função contínua f.

(a) *Se f' muda de positiva para negativa em c, então f tem um máximo local em c.*

(b) *Se f' muda de negativa para positiva em c, então f tem um mínimo local em c.*

(c) *Se f' não muda de sinal em c, então f não tem um máximo ou mínimo local em c.*



(a) Máximo local (b) Mínimo local (c) Nem máximo, nem mínimo (d) Nem mínimo, nem máximo

O que f” diz sobre f?

Teorema (teste de concavidade)

Seja f uma função que admite derivada até a segunda ordem no intervalo (a, b).

(a) *Se $f''(x) > 0$ para todo x em (a, b), então f terá concavidade para cima em (a, b).*

(b) *Se $f''(x) < 0$ para todo x em (a, b), então f terá concavidade para baixo em (a, b).*

Exemplo. Estude $f(x) = e^{-x^2/2}$ com relação à concavidade e determine os pontos de inflexão.

Solução. Pelo teste apresentado, devemos estudar o sinal da função

$$f''(x) = (x^2 - 1)e^{-x^2/2}.$$

Conclui-se que f tem concavidade para cima em $(-\infty, -1)$ e $(1, \infty)$, e concavidade para baixo em $(-1, 1)$. Os pontos de inflexão são $P_1 = (-1, f(-1)) = (-1, e^{-1/2})$ e $P_2 = (1, f(1)) = (1, e^{-1/2})$.

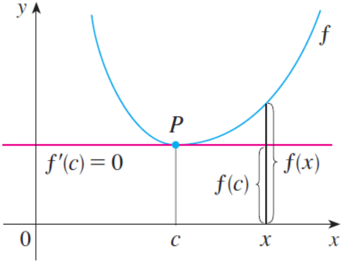
O que f" diz sobre f?

Teorema (teste da segunda derivada)

Suponha que f'' é contínua nas proximidades de c.

(a) *Se $f'(c) = 0$ e $f''(c) > 0$, então f tem um mínimo local em c.*

(b) *Se $f'(c) = 0$ e $f''(c) < 0$, então f tem um máximo local em c.*



$f''(c) > 0$, f é côncavo para cima

- $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$
- $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$ e $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2)$
- $a^4 - b^4 = (a-b)(a^3+a^2b+ab^2+b^3)$
- $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1})$, em que n é um inteiro positivo qualquer
- $\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b)+\sin(b)\cos(a)$ e $\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b)-\sin(b)\cos(a)$
- $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b)-\sin(a)\sin(b)$ e $\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b)+\sin(a)\sin(b)$
- $\tan(a+b) = \dfrac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)}$ e $\tan(a-b) = \dfrac{\tan(a)-\tan(b)}{1+\tan(a)\tan(b)}$
- $\sin^2(x)+\cos^2(x) = 1$ para qualquer x

Aprendizado (1)

Um modelo linear é definido por uma reta, isto é, uma função do tipo

$$y = f(x) = \beta_0 + \beta_1 x,$$

em que β_0 é chamado de coeficiente linear da reta (a intersecção com o eixo y) e β_1 chamado de coeficiente angular da reta (inclinação). A derivada de f (taxa instantânea de variação de f com respeito a x) é constante e igual a β_1, isto é, $f'(x) = \beta_1$. A segunda derivada de f (taxa instantânea de variação da taxa instantânea de variação de f com respeito a x) é constante e igual a 0 (zero), isto é, $f''(x) = 0$.

Aprendizado (2)

Um modelo quadrático é definido por uma parábola, isto é, uma função do tipo

$$y = f(x) = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2,$$

em que $\beta_0, \beta_1, \beta_2$ *são constantes, com* $\beta_2 \neq 0$*. A derivada de* f *(taxa instantânea de variação de* f *com respeito a* x*) é dada por*

$$f'(x) = \beta_1 + 2\beta_2 x.$$

A segunda derivada de f *(taxa instantânea de variação da taxa instantânea de variação de* f *com respeito a* x*) é dada por*

$$f''(x) = 2\beta_2.$$

Aprendizado (3)

Um modelo polinomial de grau n (um inteiro não negativo) é definido por uma função do tipo

$$y = f(x) = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \cdots + \beta_{n-1} x^{n-1} + \beta_n x^n,$$

em que $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_n$ *são constantes, com* $\beta_n \neq 0$. *A derivada de f (taxa instantânea de variação de f com respeito a x) é dada por*

$$f'(x) = \beta_1 + 2\beta_2 x + 3\beta_3 x^2 + \cdots + (n-1)\beta_{n-1} x^{n-2} + n\beta_n x^{n-1}.$$

A segunda derivada de f (taxa instantânea de variação da taxa instantânea de variação de f com respeito a x) é dada por

$$f''(x) = 2\beta_2 + 3 \cdot 2\beta_3 x + \cdots + (n-1)(n-2)\beta_{n-1} x^{n-3} + n(n-1)\beta_n x^{n-2}.$$

Aprendizado (4)

Um modelo de lei de potência é definido por uma função do tipo

$$y = f(x) = cx^k,$$

em que c e k são constantes. A derivada de f (taxa instantânea de variação de f com respeito a x) é dada por

$$f'(x) = kcx^{k-1}.$$

A segunda derivada de f (taxa instantânea de variação da taxa instantânea de variação de f com respeito a x) é dada por

$$f''(x) = k(k-1)cx^{k-2}.$$

Referências

[1] James Stewart, “Cálculo”. Vol. 1, Tradução da 9ª edição norte-americana. Editora Cengage Learning.

[2] Hamilton Luiz Guidorizzi, “Um Curso de Cálculo”, Vol. 1, 5ª edição. Editora LTC, 2001.

[3] A. F. P. C. Humes, I. S. H. Melo, L. K. Yoshida & W. T. Martins, “Noções de Cálculo Numérico”. São Paulo: McGraw-Hill do Brasil, 1984. v. 1. 201 p.