Bases da Matemática e Estatística para Ciências do Mar

Modelos Matemáticos: funções potências

Docentes: Fabio Cop Ferreira e William R. P. Conti

DCMar - IMar/Unifesp

1º semestre letivo

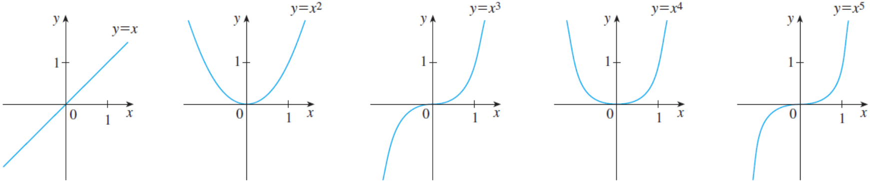
Sumário desta Aula

Definição

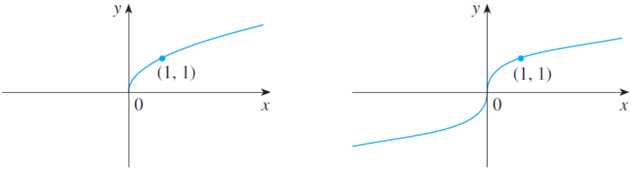
Uma função da forma $f(x) = x^k$, em que k é uma constante, é chamada ***função potência****.*

A seguir são mostrados alguns casos:

(i) $k = n$, em que n é um inteiro positivo (monômios)

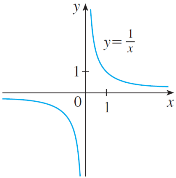


(ii) $k = 1/n$, **em que** n **é um inteiro positivo (função raiz)**



(a) $f(x) = \sqrt{x}$ (b) $f(x) = \sqrt[3]{x}$

(iii) $k = -1$ **(função recíproca)**



Exemplo 1. Faz sentido que quanto maior a área, maior a quantidade de espécies que habitam a região. Muitos ecologistas modelaram a relação espécie-área com uma função potência:

$$S(A) = cA^k,$$

em que c e k são coeficientes a serem determinados a partir dos dados. A tabela a seguir mostra valores de uma observação:

$A\,(\mathrm{km}^2)$	0,25	0,5	1	2	4	7,9	15,9	31,6	63
S	6	10	13	14	17	19	22	24	28

Diagrama de dispersão: `https://www.geogebra.org/calculator/ynxhpfha`

(a) Use os dados dessa tabela para encontrar o modelo de regressão potência para a riqueza de espécies.

(b) Utilize o modelo de regressão potência para estimar a riqueza de espécies em uma área de 10 km^2 e predizer a riqueza em uma área de 70 km^2.

(c) De acordo com esse modelo, a partir de qual valor de área a riqueza excederá 35 $\mathrm{especies}$?

(d) De acordo com esse modelo, qual é a taxa média de variação da riqueza de espécies com respeito à área entre as áreas de 10 km^2 e 20 km^2? E entre 20 km^2 e 30 km^2? E entre 30 km^2 e 35 km^2? E entre quaisquer dois valores de área?

(e) De acordo com esse modelo, qual é a taxa instantânea de variação da riqueza de espécies com respeito à área para uma área de 30 km^2? E para um valor qualquer de área?

(f) De acordo com esse modelo, qual é a taxa instantânea de variação da taxa instantânea de variação da riqueza de espécies com respeito à área para um valor qualquer de área?

(g) A função que descreve esse modelo de regressão potência é crescente ou decrescente? Tem concavidade para cima ou concavidade para baixo?

Apêndice

Respostas:

(a) O modelo de regressão potência para a riqueza de espécies é

$$S(A) = 11,066A^{0,245}.$$

(b) $S(10) = 19,443 \approx 19\,\mathrm{especies}$ e $S(70) = 31,304 \approx 31\,\mathrm{especies}.$

(c) $S(A) = 11,066A^{0,245} > 35 \quad \Leftrightarrow \quad A > \left(\dfrac{35}{11,066}\right)^{1/0,245} = 110,441 \approx 110$

(d) $\dfrac{\Delta S}{\Delta A} = \dfrac{S(20)-S(10)}{20-10} = 0,359\,\dfrac{\mathrm{especies}}{\mathrm{km}^2} \qquad \dfrac{\Delta S}{\Delta A} = \dfrac{S(30)-S(20)}{30-20} = 0,240\,\dfrac{\mathrm{especies}}{\mathrm{km}^2}$

$$\begin{aligned}
\frac{\Delta S}{\Delta A} &= \frac{S(A_2)-S(A_1)}{A_2-A_1}\\
&= \frac{(11,066A_2^{0,245})-(11,066A_1^{0,245})}{A_2-A_1}\\
&= \frac{11,066\left(A_2^{0,245}-A_1^{0,245}\right)}{A_2-A_1}\,\frac{\mathrm{especies}}{\mathrm{km}^2}.
\end{aligned}$$

(e) Após a leitura do Apêndice, em particular o Aprendizado (4), vemos que

$$\begin{aligned} S'(30) &= \lim_{\Delta A \to 0} \frac{S(30+\Delta A) - S(30)}{\Delta A} \\ &= 0,245 \cdot 11,066 \cdot 30^{0,245-1} \\ &= 2,711 \cdot 30^{-0,755} = 0,208\ \frac{\text{especies}}{\text{km}^2}. \end{aligned}$$

De forma análoga, vemos que

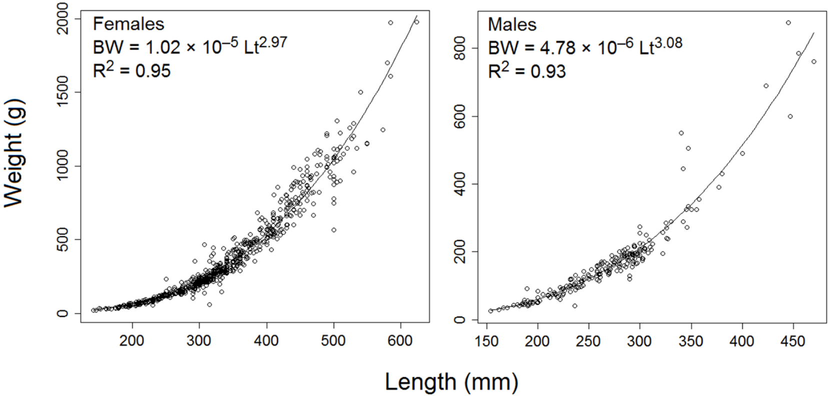
$$\begin{aligned} S'(A) &= \lim_{\Delta A \to 0} \frac{S(A+\Delta A) - S(A)}{\Delta A} \\ &= 0,245 \cdot 11,066 A^{0,245-1} \\ &= 2,711 A^{-0,755}\ \frac{\text{especies}}{\text{km}^2}. \end{aligned}$$

(f) Semelhantemente ao que fizemos no item (e), temos que

$$\begin{aligned} S''(A) &= \lim_{\Delta A \to 0} \frac{S'(A+\Delta A) - S'(A)}{\Delta A} \\ &= -0,755 \cdot 2,711 A^{-0,755-1} \\ &= -2,047 A^{-1,755} \, \frac{\text{especies}}{(\text{km}^2)^2}. \end{aligned}$$

(h) Tendo em vista que $S'(A) > 0$ para todo $A > 0$, conclui-se que a função $S(A)$ é crescente para todo $A > 0$. Além disso, como $S''(A) < 0$ para todo $A > 0$, conclui-se que a função $S(A)$ tem concavidade para baixo para todo $A > 0$.

Exemplo 2. (Enviado pelo Prof. Rodrigo Martins) Dados de peso e comprimento da merluza para animais capturados no sudeste-sul do Brasil entre 2001 e 2002. Animais de maneira geral tendem a ter o crescimento isométrico, então o expoente k da função potência tende a ser 3 (isometria). Este assunto é visto na UC Biologia Pesqueira.



Suponha que uma quantidade y dependa de outra quantidade x. Portanto, y é uma função de x e escrevemos $y = f(x)$. Se x varia de x_1 para x_2, então a variação de x (também chamado de **incremento** de x) é

$$\Delta x = x_2 - x_1,$$

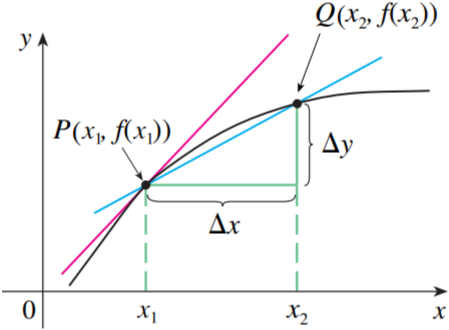
e a correspondente variação em y é

$$\Delta y = f(x_2) - f(x_1).$$

O quociente de diferença

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

é chamado de **taxa média de variação de** y **com respeito a** x sobre o intervalo $[x_1, x_2]$, e pode ser interpretado como a inclinação da reta secante PQ da figura a seguir.



Consideramos agora a taxa média de variação sobre intervalos cada vez menores: fazemos x_2 se aproximar de x_1, e portanto Δx se aproxima de 0. O limite dessas taxas médias de variação é chamado de **taxa (instantânea) de variação de** y **com respeito a** x em $x = x_1$, e é interpretado como a inclinação da reta tangente à curva $y = f(x)$ em $P(x_1, f(x_1))$:

$$\text{taxa de variação instantânea} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}.$$

Limites dessa forma surgem quando calculamos a taxa de variação em qualquer das ciências ou engenharia ou economia, e uma vez que ocorre tão vastamente, é dado a ele um nome especial e uma notação:

Definição

A derivada de uma função f em um número x_1, denotada por $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=x_1}$ ou $f'(x_1)$, é definida por

$$f'(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

se esse limite existe.

Por meio dessa definição é possível chegar-se às seguintes interpretações:

Interpretação (1)

A derivada $f'(x_1)$ é a taxa instantânea de variação de $y = f(x)$ com respeito a x quando $x = x_1$.

Interpretação (2)

A reta tangente a $y = f(x)$ em $(x_1, f(x_1))$ é a reta que passa pelo ponto $(x_1, f(x_1))$ e cuja inclinação é igual a $f'(x_1)$, a derivada de f em x_1.

Exemplo do processo limite. `https://www.geogebra.org/calculator/w6twvfzd`

Acima, consideramos a derivada de uma função f em um número dado (fixo) x_1: $f'(x_1)$. Mas podemos permitir que esse número x_1 varie: voltando à definição de $f'(x_1)$ e trocando x_1 pela variável x, obtemos

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Então, dado um número x qualquer tal que o limite acima exista, atribuímos a esse x o valor $f'(x)$. Consideramos portanto $f'(x)$ definida acima como uma nova função, chamada de **derivada de** f, e fazemos a seguinte observação: pelo que aprendemos anteriormente, o valor de f' em x, $f'(x)$, pode ser interpretado geometricamente como a inclinação da reta tangente ao gráfico de f no ponto $(x, f(x))$.

Exemplo de gráfico de f e f'. `https://www.geogebra.org/calculator/sfmmfdcv`

voltar

Intervalos de Crescimento e de Decrescimento

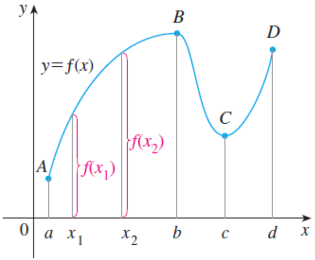
Definição (função crescente/decrescente)

Uma função f é dita ser ***crescente*** *em um intervalo I se, quaisquer que sejam x_1 e x_2 em I,*

$$x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) < f(x_2).$$

Analogamente, f é dita ser ***decrescente*** *em I se, quaisquer que sejam x_1 e x_2 em I,*

$$x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) > f(x_2).$$



Pontos de Máximo e Pontos de Mínimo

Definição (máximo/mínimo absoluto)

Seja c um número pertencente ao domínio D de uma função f. Então $f(c)$ é o valor

(*i*) ***máximo absoluto*** *de f sobre D se $f(x) \leq f(c)$ para todo x em D.*

(*ii*) ***mínimo absoluto*** *de f sobre D se $f(x) \geq f(c)$ para todo x em D.*

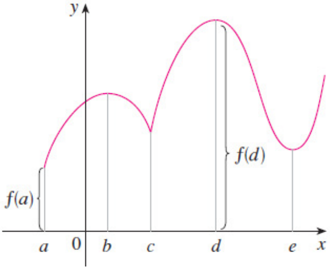
Definição (máximo/mínimo local)

Seja c um número pertencente ao domínio D de uma função f. Então $f(c)$ é o valor

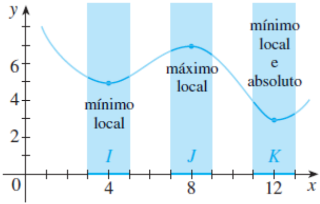
(*i*) ***máximo local*** *de f sobre D se $f(x) \leq f(c)$ quando x é próximo de c.*

(*ii*) ***mínimo local*** *de f sobre D se $f(x) \geq f(c)$ quando x é próximo de c.*

Pontos de Máximo e Pontos de Mínimo



mínimo absoluto: $f(a)$
máximo absoluto: $f(d)$
mínimos locais: $f(c)$, $f(e)$
máximos locais: $f(b)$, $f(d)$



Concavidades e Pontos de Inflexão

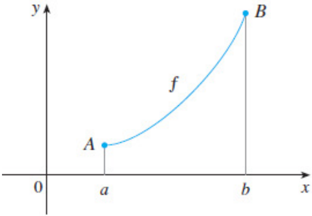
Definição (concavidade)

Se o gráfico de uma função f encontra-se ***acima*** *de todas as retas tangentes a ele para argumentos pertencentes a um intervalo I, então dizemos que f tem* ***concavidade para cima*** *no intervalo I. Se o gráfico de uma função f encontra-se* ***abaixo*** *de todas as retas tangentes a ele para argumentos pertencentes a um intervalo I, então dizemos que f tem* ***concavidade para baixo*** *no intervalo I.*

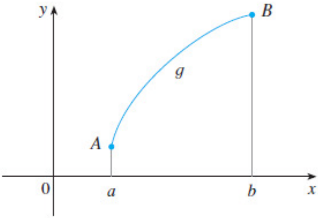
Definição (ponto de inflexão)

Um ponto P em uma curva $y = f(x)$ é dito ser um ***ponto de inflexão*** *se f é contínua aí e a curva muda de concavidade em P.*

Concavidades e Pontos de Inflexão



(a) Côncava para cima



(b) Côncava para baixo

O que f' diz sobre f?

Teorema (teste de crescimento/decrescimento)

Seja f uma função contínua em $[a, b]$ e diferenciável em (a, b).

(a) *Se $f'(x) > 0$ para todo x em (a, b), então f é crescente em (a, b).*

(b) *Se $f'(x) < 0$ para todo x em (a, b), então f é decrescente em (a, b).*

Definição (número crítico)

*Um **número crítico** de uma função f é um número c no domínio de f tal que, ou bem $f'(c) = 0$, ou bem $f'(c)$ não existe.*

O que f' diz sobre f?

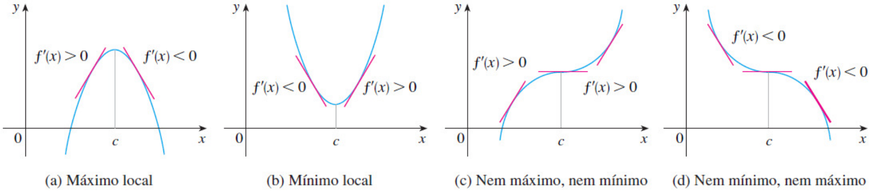
Teorema (teste da primeira derivada)

Suponha que c é um número crítico de uma função contínua f.

(a) *Se f' muda de positiva para negativa em c, então f tem um máximo local em c.*

(b) *Se f' muda de negativa para positiva em c, então f tem um mínimo local em c.*

(c) *Se f' não muda de sinal em c, então f não tem um máximo ou mínimo local em c.*



O que f" diz sobre f?

Teorema (teste de concavidade)

Seja f uma função que admite derivada até a segunda ordem no intervalo (a, b).

(a) *Se $f''(x) > 0$ para todo x em (a, b), então f terá concavidade para cima em (a, b).*

(b) *Se $f''(x) < 0$ para todo x em (a, b), então f terá concavidade para baixo em (a, b).*

Exemplo. Estude $f(x) = e^{-x^2/2}$ com relação à concavidade e determine os pontos de inflexão.

Solução. Pelo teste apresentado, devemos estudar o sinal da função

$$f''(x) = (x^2 - 1)e^{-x^2/2}.$$

Conclui-se que f tem concavidade para cima em $(-\infty, -1)$ e $(1, \infty)$, e concavidade para baixo em $(-1, 1)$. Os pontos de inflexão são $P_1 = (-1, f(-1)) = (-1, e^{-1/2})$ e $P_2 = (1, f(1)) = (1, e^{-1/2})$.

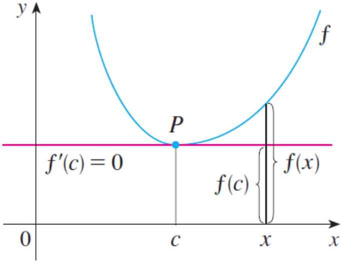
O que f" diz sobre f?

Teorema (teste da segunda derivada)

Suponha que f'' é contínua nas proximidades de c.

(a) *Se $f'(c) = 0$ e $f''(c) > 0$, então f tem um mínimo local em c.*

(b) *Se $f'(c) = 0$ e $f''(c) < 0$, então f tem um máximo local em c.*



$f''(c) > 0$, f é côncavo para cima

- $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$
- $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$ e $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2)$
- $a^4 - b^4 = (a-b)(a^3+a^2b+ab^2+b^3)$
- $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1})$, em que n é um inteiro positivo qualquer

Aprendizado (1)

Um modelo linear é definido por uma reta, isto é, uma função do tipo

$$y = f(x) = \beta_0 + \beta_1 x,$$

em que β_0 *é chamado de coeficiente linear da reta (a intersecção com o eixo* y*) e* β_1 *chamado de coeficiente angular da reta (inclinação). A derivada de* f *(taxa instantânea de variação de* f *com respeito a* x*) é constante e igual a* β_1*, isto é,* $f'(x) = \beta_1$*. A segunda derivada de* f *(taxa instantânea de variação da taxa instantânea de variação de* f *com respeito a* x*) é constante e igual a* 0 *(zero), isto é,* $f''(x) = 0$*.*

Aprendizado (2)

Um modelo quadrático é definido por uma parábola, isto é, uma função do tipo

$$y = f(x) = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2,$$

em que $\beta_0, \beta_1, \beta_2$ *são constantes, com* $\beta_2 \neq 0$*. A derivada de* f *(taxa instantânea de variação de* f *com respeito a* x*) é dada por*

$$f'(x) = \beta_1 + 2\beta_2 x.$$

A segunda derivada de f *(taxa instantânea de variação da taxa instantânea de variação de* f *com respeito a* x*) é dada por*

$$f''(x) = 2\beta_2.$$

Aprendizado (3)

Um modelo polinomial de grau n (um inteiro não negativo) é definido por uma função do tipo

$$y = f(x) = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \cdots + \beta_{n-1} x^{n-1} + \beta_n x^n,$$

em que $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_n$ *são constantes, com* $\beta_n \neq 0$. *A derivada de f (taxa instantânea de variação de f com respeito a x) é dada por*

$$f'(x) = \beta_1 + 2\beta_2 x + 3\beta_3 x^2 + \cdots + (n-1)\beta_{n-1} x^{n-2} + n\beta_n x^{n-1}.$$

A segunda derivada de f (taxa instantânea de variação da taxa instantânea de variação de f com respeito a x) é dada por

$$f''(x) = 2\beta_2 + 3 \cdot 2\beta_3 x + \cdots + (n-1)(n-2)\beta_{n-1} x^{n-3} + n(n-1)\beta_n x^{n-2}.$$

Aprendizado (4)

Um modelo de lei de potência é definido por uma função do tipo

$$y = f(x) = cx^k,$$

em que c e k são constantes. A derivada de f (taxa instantânea de variação de f com respeito a x) é dada por

$$f'(x) = kcx^{k-1}.$$

A segunda derivada de f (taxa instantânea de variação da taxa instantânea de variação de f com respeito a x) é dada por

$$f''(x) = k(k-1)cx^{k-2}.$$

Referências

[1] James Stewart, "Cálculo". Vol. 1, Tradução da 9ª edição norte-americana. Editora Cengage Learning.

[2] Hamilton Luiz Guidorizzi, "Um Curso de Cálculo", Vol. 1, 5ª edição. Editora LTC, 2001.