Bases da Matemática e Estatística para Ciências do Mar

Modelos Matemáticos: funções lineares

Docentes: Fabio Cop Ferreira e William R. P. Conti

DCMar - IMar/Unifesp

1º semestre letivo

Sumário desta Aula

Definição

*Quando dizemos que y é uma **função linear** de x, queremos dizer que o gráfico da função é uma reta; assim, podemos usar a forma intersecção-inclinação da equação de uma reta para escrever uma fórmula para a função:*

$$y = f(x) = \beta_0 + \beta_1 x,$$

*em que β_0 é o **coeficiente linear** da reta (a intersecção com o eixo y) e β_1 é o **coeficiente angular** da reta (inclinação).*

Exemplo 1. A tabela abaixo fornece uma lista de níveis médios de dióxido de carbono na atmosfera, medidos em partes por milhão no Observatório de Mauna Loa em Hilo, no Havaí, de 1980 a 2008.

Ano	Nível de CO_2 (em ppm)	Ano	Nível de CO_2 (em ppm)
1980	338,7	1996	362,4
1982	341,2	1998	366,5
1984	344,4	2000	369,4
1986	347,2	2002	373,2
1988	351,5	2004	377,5
1990	354,2	2006	381,9
1992	356,3	2008	385,6
1994	358,6		

Diagrama de dispersão: `https://www.geogebra.org/calculator/mshwwub9`

(a) Use os dados dessa tabela para encontrar o modelo de regressão linear para o nível de dióxido de carbono.

(b) Utilize-o para estimar o nível médio de $\mathrm{CO_2}$ em 1987 e predizer o nível para o ano de 2015.

(c) De acordo com esse modelo, quando o nível de $\mathrm{CO_2}$ excederá 420 ppm?

(d) De acordo com esse modelo, qual é a taxa média de variação do nível de dióxido de carbono com respeito ao tempo entre os anos de 1980 e 1990? E entre 1990 e 2000? E entre 2000 e 2002? E entre quaisquer dois anos? O que podemos concluir dessas contas?

(e) De acordo com esse modelo, qual é a taxa instantânea de variação do nível de dióxido de carbono com respeito ao tempo no ano 2000? E em qualquer ano? O que podemos concluir dessas contas?

(f) De acordo com esse modelo, qual é a taxa instantânea de variação da taxa instantânea de variação do nível de dióxido de carbono com respeito ao tempo em qualquer ano? O que podemos concluir dessas contas?

◂ Apêndice

Respostas:

(a) O modelo de regressão linear para o nível de $\mathrm{CO_2}$ é

$$C(t) = -2938,07238 + 1,65429t.$$

(b) $C(1987) \approx 349,0\,\mathrm{ppm}$ e $C(2015) \approx 395,3\,\mathrm{ppm}$.

(c) $C(t) = -2938,07238 + 1,65429t > 420 \quad \Leftrightarrow \quad t > 2029,9176 \approx 2030.$

(d) $\dfrac{\Delta C}{\Delta t} = \dfrac{C(1990) - C(1980)}{1990 - 1980} = 1,65429\,\dfrac{\mathrm{ppm}}{\mathrm{ano}} \qquad \dfrac{\Delta C}{\Delta t} = \dfrac{C(2000) - C(1990)}{2000 - 1990} = 1,65429\,\dfrac{\mathrm{ppm}}{\mathrm{ano}}$

$$\begin{aligned}
\frac{\Delta C}{\Delta t} = \frac{C(t_2) - C(t_1)}{t_2 - t_1} &= \frac{(-2938,07238 + 1,65429t_2) - (-2938,07238 + 1,65429t_1)}{t_2 - t_1} \\
&= \frac{1,65429(t_2 - t_1)}{t_2 - t_1} \\
&= 1,65429\,\frac{\mathrm{ppm}}{\mathrm{ano}}. \qquad (1)
\end{aligned}$$

Conclui-se que a taxa média de variação do nível de dióxido de carbono com respeito ao tempo é constante e igual ao coeficiente angular da reta do modelo. (Isso é sempre verdade para modelos lineares?)

(e) Após a leitura do Apêndice, e tomando $t_1 = 2000$ e $t_2 = 2000 + \Delta t$ na equação (1), vemos que

$$\begin{aligned} C'(2000) &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{C(2000 + \Delta t) - C(2000)}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \to 0} 1,65429 = 1,65429 \, \frac{\mathrm{ppm}}{\mathrm{ano}}. \end{aligned}$$

De forma análoga, vemos que

$$\begin{aligned} C'(t) &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{C(t + \Delta t) - C(t)}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \to 0} 1,65429 = 1,65429 \, \frac{\mathrm{ppm}}{\mathrm{ano}}. \end{aligned}$$

Conclui-se que a taxa instantânea de variação do nível de dióxido de carbono com respeito ao tempo é constante e igual ao coeficiente angular da reta do modelo. (Isso é sempre verdade para modelos lineares?)

(f) Semelhantemente ao que fizemos no item (e), temos que

$$\begin{aligned} C''(t) &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{C'(t+\Delta t) - C'(t)}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1,65429 - 1,65429}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \to 0} 0 = 0 \, \frac{\mathrm{ppm}}{\mathrm{ano}^2}. \end{aligned}$$

Conclui-se que a taxa instantânea de variação da taxa instantânea de variação do nível de dióxido de carbono com respeito ao tempo é constante e igual a 0 (zero). (Isso é sempre verdade para modelos lineares?)

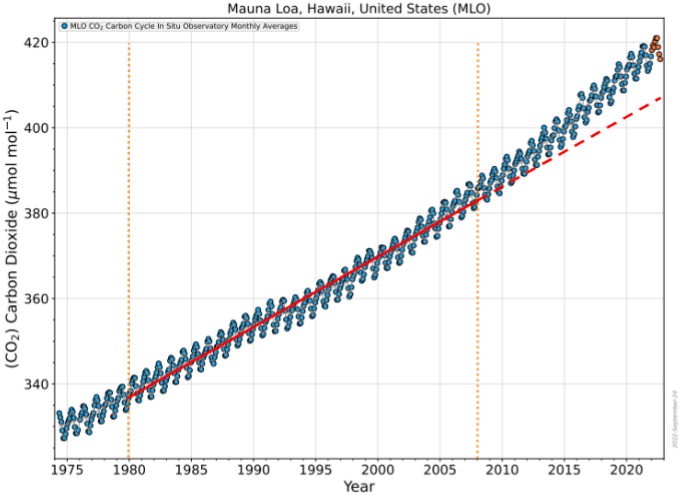


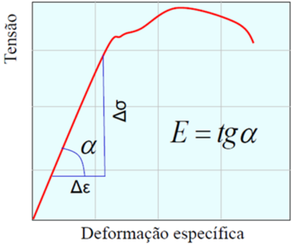
Figura: Adaptada de `https://gml.noaa.gov/dv/iadv`.

Exemplo 2. (Enviado pelo Prof. Rodrigo Martins) Dados de uma regressão linear simples, que relaciona a concentração de clorofila no outono-inverno no entorno de Ilhabela com a produção de lulas na primavera-verão seguintes. O que os dados mostram é que quando a concentração de clorofila é baixa, sinaliza que há mais zooplâncton herbívoro, que servem de presa para as larvas de lula; as larvas assim bem alimentadas tem maiores chances de sobreviver e aparecerem nas capturas da pesca entre 6 e 9 meses depois (que é o tempo de vida delas). A relação é muito clara (linear) e o coeficiente de determinação (R^2) bastante alto e significativo. Este assunto é visto na UC Introdução à Oceanografia, na aula de Oceanografia Pesqueira. São dados do artigo Martins et al. 2020.

Ano	Chla-a outono-inverno	Ano	Capturas primavera-verão (kg)
2002	0,99	2003	86500
2003	0,91	2004	101000
2004	1	2005	106500
2005	0,85	2006	122500
2006	0,91	2007	72500
2009	1,2	2010	6112,5
2010	1,09	2011	18278

Diagrama de dispersão e modelo linear: `https://www.geogebra.org/calculator/bxugvmvp`

Exemplo 3. (Enviado pela Profa. Juliana Moretti) O **módulo Young ou Elasticidade (*E*)** é definido como a propriedade mecânica que mede a rigidez de um material sólido. Quando um material é submetido a uma carga de tração ou compressão, o mesmo irá sofrer deformação, como é mostrado neste vídeo de um ensaio realizado pelo Departamento de Engenharia Mecânica da UEM. Os dados de tensão (força por unidade de área) e deformação (deformação proporcional) podem ser plotados em um gráfico, que é exemplificado pela seguinte figura:



Fonte: Notas de aula PCC Agopyan e Figueiredo (2014)

Do trecho linear do gráfico, ou seja, onde a tensão é proporcional à deformação, obtém-se o módulo de elasticidade, que corresponde ao coeficiente angular da reta. Quanto maior o valor do módulo de elasticidade, ou seja, quanto maior a inclinação da reta, mais rígido é o material.

Na figura abaixo são apresentados dados de tensão x deformação de diferentes materiais:

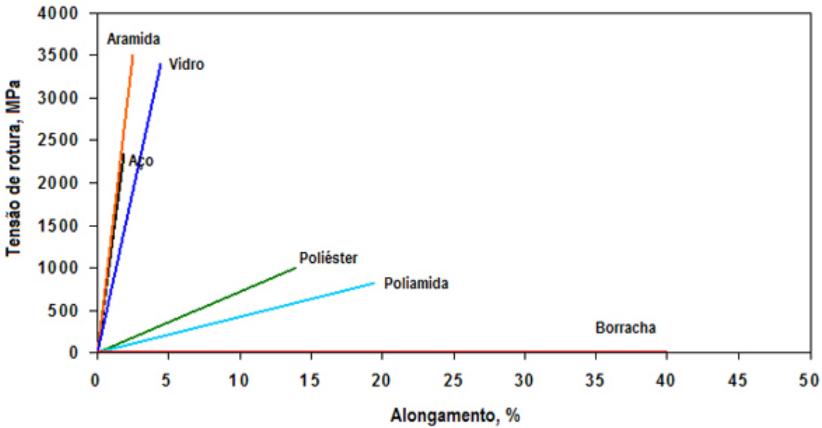


Figura: Retirada do site do CTB.

Exemplos de valores de módulo de elasticidade para alguns materiais:

Material	Módulo de Elasticidade (GPa)
concreto	15-40
aço	210
alumínio	70
fibras de carbono	200-450
borracha	0,001-0,02

Este assunto é visto na UC Introdução à Resistência dos Materiais e na UC Fundamentos de Ciência e Engenharia de Materiais.

Aprendizado (1)

Um modelo linear é definido por uma reta, isto é, uma função do tipo

$$y = f(x) = \beta_0 + \beta_1 x,$$

em que β_0 é chamado de coeficiente linear da reta (a intersecção com o eixo y) e β_1 chamado de coeficiente angular da reta (inclinação). A derivada de f (taxa instantânea de variação de f com respeito a x) é constante e igual a β_1, isto é, $f'(x) = \beta_1$. A segunda derivada de f (taxa instantânea de variação da taxa instantânea de variação de f com respeito a x) é constante e igual a 0 (zero), isto é, $f''(x) = 0$.

Suponha que uma quantidade y dependa de outra quantidade x. Portanto, y é uma função de x e escrevemos $y = f(x)$. Se x varia de x_1 para x_2, então a variação de x (também chamado de **incremento** de x) é

$$\Delta x = x_2 - x_1,$$

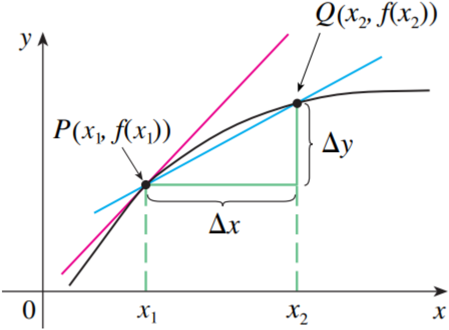
e a correspondente variação em y é

$$\Delta y = f(x_2) - f(x_1).$$

O quociente de diferença

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

é chamado de **taxa média de variação de** y **com respeito a** x sobre o intervalo $[x_1, x_2]$, e pode ser interpretado como a inclinação da reta secante PQ da figura a seguir.



Consideramos agora a taxa média de variação sobre intervalos cada vez menores: fazemos x_2 se aproximar de x_1, e portanto Δx se aproxima de 0. O limite dessas taxas médias de variação é chamado de **taxa (instantânea) de variação de** y **com respeito a** x em $x = x_1$, e é interpretado como a inclinação da reta tangente à curva $y = f(x)$ em $P(x_1, f(x_1))$:

$$\text{taxa de variação instantânea} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}.$$

Limites dessa forma surgem quando calculamos a taxa de variação em qualquer das ciências ou engenharia ou economia, e uma vez que ocorre tão vastamente, é dado a ele um nome especial e uma notação:

Definição

A derivada de uma função f em um número x_1, denotada por $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=x_1}$ ou $f'(x_1)$, é definida por

$$f'(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

se esse limite existe.

Por meio dessa definição é possível chegar-se às seguintes interpretações:

Interpretação (1)

A derivada $f'(x_1)$ é a taxa instantânea de variação de $y = f(x)$ com respeito a x quando $x = x_1$.

Interpretação (2)

A reta tangente a $y = f(x)$ em $(x_1, f(x_1))$ é a reta que passa pelo ponto $(x_1, f(x_1))$ e cuja inclinação é igual a $f'(x_1)$, a derivada de f em x_1.

Exemplo do processo limite. `https://www.geogebra.org/calculator/w6twvfzd`

Acima, consideramos a derivada de uma função f em um número dado (fixo) x_1: $f'(x_1)$. Mas podemos permitir que esse número x_1 varie: voltando à definição de $f'(x_1)$ e trocando x_1 pela variável x, obtemos

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Então, dado um número x qualquer tal que o limite acima exista, atribuímos a esse x o valor $f'(x)$. Consideramos portanto $f'(x)$ definida acima como uma nova função, chamada de **derivada de** f, e fazemos a seguinte observação: pelo que aprendemos anteriormente, o valor de f' em x, $f'(x)$, pode ser interpretado geometricamente como a inclinação da reta tangente ao gráfico de f no ponto $(x, f(x))$.

Exemplo de gráfico de f e f'. `https://www.geogebra.org/calculator/sfmmfdcv`

voltar

Referências

[1] James Stewart, "Cálculo". Vol. 1, Tradução da 9ª edição norte-americana. Editora Cengage Learning.

[2] Hamilton Luiz Guidorizzi, "Um Curso de Cálculo", Vol. 1, 5ª edição. Editora LTC, 2001.