Bases da Matemática e Estatística para Ciências do Mar
Modelos Matemáticos: funções exponenciais e funções logarítmicas

Docentes: Fabio Cop Ferreira e William R. P. Conti

DCMar - IMar/Unifesp

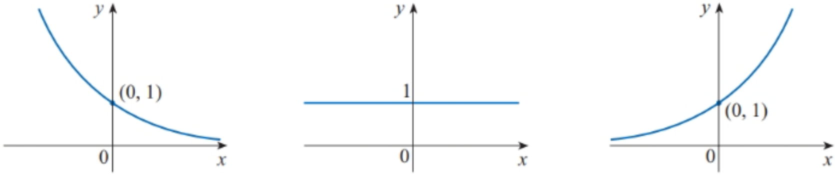
1º semestre letivo

Sumário desta Aula

Definição

*As **funções exponenciais** são da forma $f(x) = b^x$, em que a base b é uma constante positiva.*

Se $0 < b < 1$, a função exponencial decresce; se $b = 1$, ela é uma constante; e se $b > 1$,ela cresce. Esses três casos são ilustrados na figura abaixo:



(a) $y = b^x,\ 0 < b < 1$ (b) $y = 1^x$ (c) $y = b^x,\ b > 1$

Seu domínio é $(-\infty, \infty)$ e sua imagem é $(0, \infty)$.

Uma razão para a importância da função exponencial está nas propriedades a seguir. Se x e y forem números racionais, então essas propriedades são bem conhecidas da álgebra elementar. Pode-se demonstrar que elas permanecem verdadeiras para números reais arbitrários x e y.

Se a e b forem números positivos, e x e y quaisquer números reais, então

1. $b^{x+y} = b^x b^y$
2. $b^{x-y} = \dfrac{b^x}{b^y}$
3. $(b^x)^y = b^{xy}$
4. $(ab)^x = a^x b^x$

Definição

*As **funções logarítmicas** são da forma $f(x) = \log_b(x)$, em que a base b é uma constante positiva.*

A função $f(x) = \log_b(x)$ é, por definição, a inversa da função $f(x) = b^x$. Isso significa que elas estão relacionadas pela seguinte relação:

$$\log_b(x) = y \qquad \Leftrightarrow \qquad b^y = x.$$

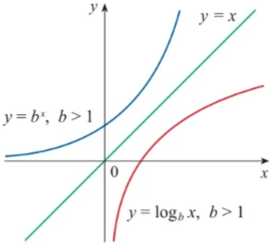
Dessa forma, se $x > 0$, então $\log_b(x)$ é o expoente ao qual deve se elevar a base b para se obter x. Por exemplo, $\log_{10}(0,001) = -3$, pois $10^{-3} = 0,001$.

As seguintes **equações de cancelamento** seguem da relação de inversa que $f(x) = \log_b(x)$ e $f(x) = b^x$ guardam entre si:

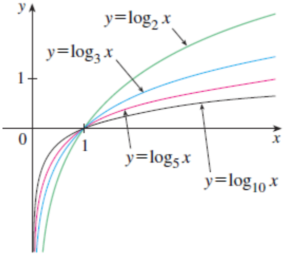
$$\log_b(b^x) = x \ \text{ para todo } x \in \mathbb{R} \qquad\qquad \text{e} \qquad\qquad b^{\log_b(x)} = x \ \text{ para todo } x > 0.$$

A função logarítmica tem o domínio $(0, \infty)$ e a imagem $\mathbb{R}$.

O gráfico da função logarítmica é a reflexão do gráfico de $y = b^x$ em torno da reta $y = x$.



A figura abaixo mostra casos em que $b > 1$ (as funções logarítmicas mais importantes têm base $b > 1$):



As seguintes propriedades das funções logarítmicas resultam das propriedades correspondentes das funções exponenciais dadas no slide 5.

Se b um número positivo, e x e y quaisquer números reais positivos, então

1. $\log_b(xy) = \log_b(x) + \log_b(y)$
2. $\log_b\left(\dfrac{x}{y}\right) = \log_b(x) - \log_b(y)$
3. $\log_b(x^r) = r\log_b(x)$, em que r é qualquer número real

Dentre todas as bases possíveis para uma função exponencial e uma função logarítmica, há uma que é mais conveniente para os propósitos do cálculo: a base e. A constante e é chamada de número de Euler, e seu valor com 12 casas decimais é 2,718281828459. Neste caso, chamamos

1. $f(x) = e^x$ de **função exponencial natural**;
2. $f(x) = \log_e(x)$ de **logaritmo natural**, sendo adotado para este último a notação especial $\log_e(x) = \ln(x)$.

Exemplo 1. Em 1995, foi publicado um artigo de pesquisa que detalhou o efeito do inibidor de protease ABT-538 no vírus de imunodeficiência humana HIV-1[1]. A tabela abaixo mostra valores $V(t)$ da carga viral no plasma do paciente 303, medida em cópias de RNA por mL, t dias após o tratamento com ABT-538 ter começado.

t (dias)	$V(t)$ (copias de RNA/mL)
1	76,0
4	53,0
8	18,0
11	9,4
15	5,2
22	3,6

Diagrama de dispersão: `https://www.geogebra.org/calculator/fjatwfdm`

[1] D. HO et al. “Rapid Turnover of Plasma Virions and CD4 Lymphocytes en HIV-1 Infection”, *Nature* 373 (1995): 123-26.

Exemplo 2. Um habitante comum do intestino humano é a bactéria *Escherichia coli*, cujo nome é uma homenagem ao pediatra alemão Theodor Escherich, que a identificou em 1885. Uma célula desta bactéria em um meio nutriente líquido se divide em duas células a cada 20 minutos. A população inicial de uma cultura é de 50 células.

(a) Qual o tamanho da população após 1 hora e 40 minutos?

(b) Qual o tamanho da população após t horas?

(c) Quando a população atingirá um milhão de células?

(d) Qual o tamanho da população após 6 horas?

(e) Encontre a taxa de crescimento depois de 6 horas.

(f) Encontre a taxa de crescimento relativa.

Apêndice

Respostas:

(a) $P(0) = 50 \quad \rightarrow \quad P(1/3) = 2P(0) = 2 \cdot 50 \quad \rightarrow \quad P(2/3) = 2P(1/3) = 2^2 \cdot 50 \quad \rightarrow$
$P(3/3) = 2P(2/3) = 2^3 \cdot 50 \quad \rightarrow \quad P(4/3) = 2P(3/3) = 2^4 \cdot 50 \quad \rightarrow \quad P(5/3) = 2P(2/3) = 2^5 \cdot 50$

Vê-se assim que após 1 hora e 40 minutos (5/3 de hora) a população é de $2^5 \cdot 50 = 1600\,\mathrm{celulas}$.

(b) $P(t) = P(0)2^{3t} = P(0)8^t = 50 \cdot 8^t$

(c) $t = \log_8\left(\dfrac{1.000.000}{50}\right) \approx 4,76\,\mathrm{h} \approx$ 4 horas e 45 minutos

(d) $P(6) = 50 \cdot 8^6 = 13.107.200\,\mathrm{celulas}$

(e) $P'(t) = \ln(8)P(0)8^t$, de forma que $P'(6) = \ln(8)P(0)8^6 = \ln(8) \cdot 50 \cdot 8^6 \approx 27.255.656,18\,\dfrac{\mathrm{celulas}}{\mathrm{hora}}$

(f) $P'(t)/P(t) = \ln(8)$

Nos cálculos do item (e) fez-se uso do seguinte limite especial:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{e^{\Delta t} - 1}{\Delta t} = 1.$$

Exemplo 3. (Enviado pelo Prof. Emiliano) Na UC Geologia Geral abordamos o método de datação radiométrica, que utiliza funções exponenciais para calcular o decaimento radioativo de determinados isótopos instáveis.

Princípio envolvido: As substâncias radioativas decaem pela emissão espontânea de radiação. Se $m(t)$ for a massa remanescente de uma massa inicial m_0 da substância após um tempo t, então a taxa de decaimento $-m'(t)/m(t)$ foi analisada experimentalmente como sendo constante. Segue que

$$m'(t) = km(t),$$

em que k é uma constante negativa. Em outras palavras, substâncias radioativas decaem a uma taxa proporcional à sua massa restante. Isso significa que a massa decai exponencialmente:

$$m(t) = m_0 e^{kt}.$$

Os físicos expressam a taxa de decaimento radioativo como **meia-vida**, o tempo necessário para a metade de qualquer quantidade dada decair. Por exemplo, a meia-vida do rádio-226 é de 1590 anos, isto é, $m(1590) = \frac{1}{2}m_0$, e portanto $k = -ln(2)/1590$; a meia-vida do potássio-40 é de 1,25 bilhões de anos, isto é, $m(1,25 \times 10^9) = \frac{1}{2}m_0$, e portanto $k = -ln(2)/(1,25 \times 10^9)$.

Exemplo 3.1. Os cientistas podem determinar a idade de objetos antigos pelo método de *datação por radiocarbono*. O bombardeamento da parte superior da atmosfera por raios cósmicos converte o nitrogênio em um isótopo radioativo do carbono, $^{14}\mathrm{C}$, com meia-vida de cerca de 5730 anos. A vegetação absorve o dióxido de carbono através da atmosfera e a vida animal assimila $^{14}\mathrm{C}$ através da cadeia alimentar. Quando uma planta ou animal morre, para de repor seu carbono e a quantidade de $^{14}\mathrm{C}$ começa a decrescer por decaimento radioativo. Portanto, o nível de radioatividade também deve decrescer exponencialmente.

Digamos que uma descoberta revelou um fragmento de pergaminho que possui cerca de 74% da radioatividade de $^{14}\mathrm{C}$ que se observa em tecidos vegetais existentes na Terra atualmente. A estimativa da idade do pergaminho pode então ser feita da seguinte maneira:

Como $m(5730) = \frac{1}{2}m_0$, então $k = -ln(2)/5730$. Assim, se atualmente $m(t) = 74\% m_0$, segue que

$$t = \frac{1}{k}\ln(0,74) = -\frac{5730}{\ln(2)}\ln(0,74) \approx 2489\,\mathrm{anos}.$$

Aprendizado (7)

Um modelo exponencial é definido por uma função do tipo

$$y = f(x) = y_0 b^x,$$

em que y_0 *e* b *são constantes, com* $b > 0$. *A derivada de* f *(taxa instantânea de variação de* f *com respeito a* x*) é dada por*

$$f'(x) = \ln(b) y_0 b^x = \ln(b) f(x).$$

A segunda derivada de f *(taxa instantânea de variação da taxa instantânea de variação de* f *com respeito a* x*) é dada por*

$$f''(x) = \ln^2(b) y_0 b^x = \ln^2(b) f(x).$$

Alternativamente, temos

Aprendizado (8)

Um modelo exponencial é definido por uma função do tipo

$$y = f(x) = y_0 e^{kx},$$

em que y_0 *e* k *são constantes. A derivada de* f *(taxa instantânea de variação de* f *com respeito a* x*) é dada por*

$$f'(x) = ky_0 e^{kx} = kf(x).$$

A segunda derivada de f *(taxa instantânea de variação da taxa instantânea de variação de* f *com respeito a* x*) é dada por*

$$f''(x) = k^2 y_0 e^{kx} = k^2 f(x).$$

Exemplo 4. Considere a função potência $S(A) = cA^k$ já estudada, cujas observações eram

$A\ (\mathrm{km}^2)$	0,25	0,5	1	2	4	7,9	15,9	31,6	63
S	6	10	13	14	17	19	22	24	28

Por meio da função logaritmo natural ela toma a forma linear $Y = \beta_0 + \beta_1 X$, em que

$$X = \ln(A), \qquad Y = \ln(S), \qquad \beta_0 = \ln(c) \qquad \text{e} \qquad \beta_1 = k,$$

cujas observações associadas são

$X = \ln(A)$	-1,386	-0,693	0	0,693	1,386	2,067	2,766	3,453	4,143
$Y = \ln(S)$	1,792	2,303	2,565	2,639	2,833	2,944	3,091	3,178	3,332

Diagrama de dispersão: `https://www.geogebra.org/calculator/keq26ngu`

A regressão linear mostra que $\beta_0 = 2,4039$ e $\beta_1 = 0,2448$, o que implica que $c = e^{\beta_0} = 11,0663$ e $k = 0,2448$.

Exemplo 5. A pressão atmosférica p em função da altura h pode ser modelada por uma função exponencial na forma

$$p = be^{-mh}.$$

Os valores a seguir correspondem à pressão medida em diferentes alturas.

$h\,(\mathrm{m})$	0	5000	10000	15000	20000
$p\,(\mathrm{Pa})$	100000	47500	22600	10800	5100

Por meio da função logaritmo natural ela toma a forma linear $Y = \beta_0 + \beta_1 X$, em que

$$X = h, \qquad Y = \ln(p), \qquad \beta_0 = \ln(b) \qquad \text{e} \qquad \beta_1 = -m,$$

cujas observações associadas são

$X = h$	0	5000	10000	15000	20000
$Y = \ln(p)$	11,5129	10,7685	10,0257	9,2873	8,537

Diagrama de dispersão: `https://www.geogebra.org/calculator/pnvaqc8t`

A regressão linear mostra que $\beta_0 = 11,51289$ e $\beta_1 = -1,5 \times 10^{-4}$, o que implica que $b = e^{\beta_0} = 99996,6$ e $m = 1,5 \times 10^{-4}$.

Aprendizado (9)

As funções logarítmicas são da forma

$$y = f(x) = \log_b(x),$$

em que a base b é uma constante positiva. A derivada de f (taxa instantânea de variação de f com respeito a x) é dada por

$$f'(x) = \frac{1}{x \ln(b)}.$$

A segunda derivada de f (taxa instantânea de variação da taxa instantânea de variação de f com respeito a x) é dada por

$$f''(x) = -\frac{1}{x^2 \ln(b)}.$$

Suponha que uma quantidade y dependa de outra quantidade x. Portanto, y é uma função de x e escrevemos $y = f(x)$. Se x varia de x_1 para x_2, então a variação de x (também chamado de **incremento** de x) é

$$\Delta x = x_2 - x_1,$$

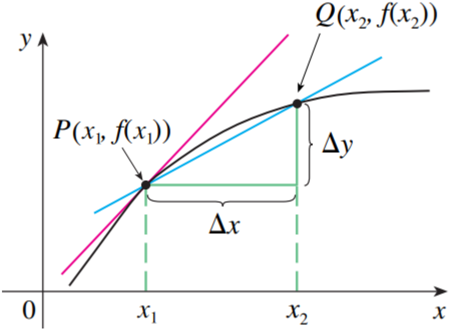
e a correspondente variação em y é

$$\Delta y = f(x_2) - f(x_1).$$

O quociente de diferença

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

é chamado de **taxa média de variação de y com respeito a x** sobre o intervalo $[x_1, x_2]$, e pode ser interpretado como a inclinação da reta secante PQ da figura a seguir.



Consideramos agora a taxa média de variação sobre intervalos cada vez menores: fazemos x_2 se aproximar de x_1, e portanto Δx se aproxima de 0. O limite dessas taxas médias de variação é chamado de **taxa (instantânea) de variação de y com respeito a** x em $x = x_1$, e é interpretado como a inclinação da reta tangente à curva $y = f(x)$ em $P(x_1, f(x_1))$:

$$\text{taxa de variação instantânea} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}.$$

Limites dessa forma surgem quando calculamos a taxa de variação em qualquer das ciências ou engenharia ou economia, e uma vez que ocorre tão vastamente, é dado a ele um nome especial e uma notação:

Definição

A derivada de uma função f em um número x_1, denotada por $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_1}$ ou $f'(x_1)$, é definida por

$$f'(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

se esse limite existe.

Por meio dessa definição é possível chegar-se às seguintes interpretações:

Interpretação (1)

A derivada $f'(x_1)$ é a taxa instantânea de variação de $y = f(x)$ com respeito a x quando $x = x_1$.

Interpretação (2)

A reta tangente a $y = f(x)$ em $(x_1, f(x_1))$ é a reta que passa pelo ponto $(x_1, f(x_1))$ e cuja inclinação é igual a $f'(x_1)$, a derivada de f em x_1.

Exemplo do processo limite. `https://www.geogebra.org/calculator/w6twvfzd`

Acima, consideramos a derivada de uma função f em um número dado (fixo) x_1: $f'(x_1)$. Mas podemos permitir que esse número x_1 varie: voltando à definição de $f'(x_1)$ e trocando x_1 pela variável x, obtemos

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Então, dado um número x qualquer tal que o limite acima exista, atribuímos a esse x o valor $f'(x)$. Consideramos portanto $f'(x)$ definida acima como uma nova função, chamada de **derivada de** f, e fazemos a seguinte observação: pelo que aprendemos anteriormente, o valor de f' em x, $f'(x)$, pode ser interpretado geometricamente como a inclinação da reta tangente ao gráfico de f no ponto $(x, f(x))$.

Exemplo de gráfico de f e f'. `https://www.geogebra.org/calculator/sfmmfdcv`

voltar

Intervalos de Crescimento e de Decrescimento

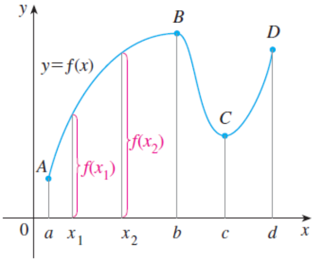
Definição (função crescente/decrescente)

*Uma função f é dita ser **crescente** em um intervalo I se, quaisquer que sejam x_1 e x_2 em I,*

$$x_1 < x_2 \qquad \Rightarrow \qquad f(x_1) < f(x_2).$$

*Analogamente, f é dita ser **decrescente** em I se, quaisquer que sejam x_1 e x_2 em I,*

$$x_1 < x_2 \qquad \Rightarrow \qquad f(x_1) > f(x_2).$$



Pontos de Máximo e Pontos de Mínimo

Definição (máximo/mínimo absoluto)

Seja c um número pertencente ao domínio D de uma função f. Então $f(c)$ é o valor

(i) ***máximo absoluto*** *de f sobre D se $f(x) \leq f(c)$ para todo x em D.*

(ii) ***mínimo absoluto*** *de f sobre D se $f(x) \geq f(c)$ para todo x em D.*

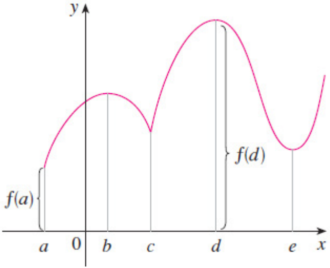
Definição (máximo/mínimo local)

Seja c um número pertencente ao domínio D de uma função f. Então $f(c)$ é o valor

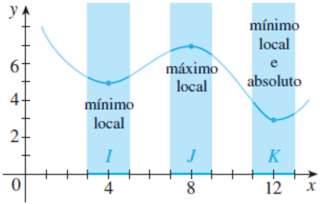
(i) ***máximo local*** *de f sobre D se $f(x) \leq f(c)$ quando x é próximo de c.*

(ii) ***mínimo local*** *de f sobre D se $f(x) \geq f(c)$ quando x é próximo de c.*

Pontos de Máximo e Pontos de Mínimo



mínimo absoluto: $f(a)$
máximo absoluto: $f(d)$
mínimos locais: $f(c)$, $f(e)$
máximos locais: $f(b)$, $f(d)$



Concavidades e Pontos de Inflexão

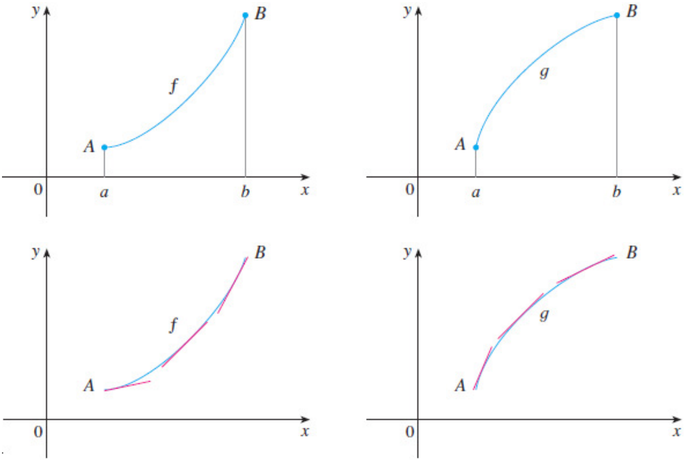
Definição (concavidade)

Se o gráfico de uma função f encontra-se ***acima*** *de todas as retas tangentes a ele para argumentos pertencentes a um intervalo I, então dizemos que f tem* ***concavidade para cima*** *no intervalo I. Se o gráfico de uma função f encontra-se* ***abaixo*** *de todas as retas tangentes a ele para argumentos pertencentes a um intervalo I, então dizemos que f tem* ***concavidade para baixo*** *no intervalo I.*

Definição (ponto de inflexão)

Um ponto P em uma curva $y = f(x)$ é dito ser um ***ponto de inflexão*** *se f é contínua aí e a curva muda de concavidade em P.*

Concavidades e Pontos de Inflexão



(a) Côncava para cima

(b) Côncava para baixo

O que f' diz sobre f?

Teorema (teste de crescimento/decrescimento)

Seja f uma função contínua em $[a, b]$ e diferenciável em (a, b).

(a) *Se $f'(x) > 0$ para todo x em (a, b), então f é crescente em (a, b).*

(b) *Se $f'(x) < 0$ para todo x em (a, b), então f é decrescente em (a, b).*

Definição (número crítico)

*Um **número crítico** de uma função f é um número c no domínio de f tal que, ou bem $f'(c) = 0$, ou bem $f'(c)$ não existe.*

O que f' diz sobre f?

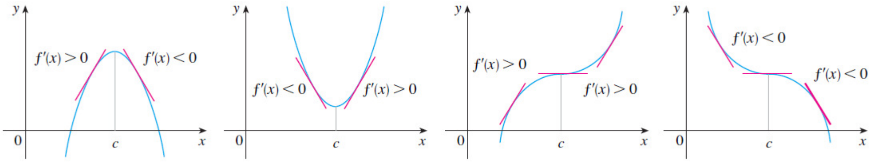
Teorema (teste da primeira derivada)

Suponha que c é um número crítico de uma função contínua f.

(a) *Se f' muda de positiva para negativa em c, então f tem um máximo local em c.*

(b) *Se f' muda de negativa para positiva em c, então f tem um mínimo local em c.*

(c) *Se f' não muda de sinal em c, então f não tem um máximo ou mínimo local em c.*



(a) Máximo local (b) Mínimo local (c) Nem máximo, nem mínimo (d) Nem mínimo, nem máximo

O que f” diz sobre f?

Teorema (teste de concavidade)

Seja f uma função que admite derivada até a segunda ordem no intervalo (a, b).

(a) *Se $f''(x) > 0$ para todo x em (a, b), então f terá concavidade para cima em (a, b).*

(b) *Se $f''(x) < 0$ para todo x em (a, b), então f terá concavidade para baixo em (a, b).*

Exemplo. Estude $f(x) = e^{-x^2/2}$ com relação à concavidade e determine os pontos de inflexão.

Solução. Pelo teste apresentado, devemos estudar o sinal da função

$$f''(x) = (x^2 - 1)e^{-x^2/2}.$$

Conclui-se que f tem concavidade para cima em $(-\infty, -1)$ e $(1, \infty)$, e concavidade para baixo em $(-1, 1)$. Os pontos de inflexão são $P_1 = (-1, f(-1)) = (-1, e^{-1/2})$ e $P_2 = (1, f(1)) = (1, e^{-1/2})$.

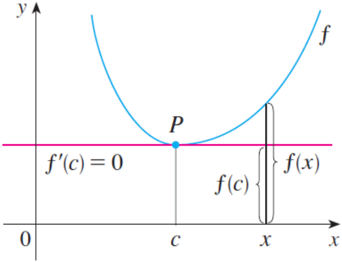
O que f" diz sobre f?

Teorema (teste da segunda derivada)

Suponha que f'' é contínua nas proximidades de c.

(a) *Se $f'(c) = 0$ e $f''(c) > 0$, então f tem um mínimo local em c.*

(b) *Se $f'(c) = 0$ e $f''(c) < 0$, então f tem um máximo local em c.*



$f''(c) > 0$, f é côncavo para cima

- $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$
- $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$ e $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2)$
- $a^4 - b^4 = (a-b)(a^3+a^2b+ab^2+b^3)$
- $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1})$, em que n é um inteiro positivo qualquer
- $\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b)+\sin(b)\cos(a)$ e $\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b)-\sin(b)\cos(a)$
- $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b)-\sin(a)\sin(b)$ e $\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b)+\sin(a)\sin(b)$
- $\tan(a+b) = \dfrac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)}$ e $\tan(a-b) = \dfrac{\tan(a)-\tan(b)}{1+\tan(a)\tan(b)}$
- $\sin^2(x)+\cos^2(x) = 1$ para qualquer x

Aprendizado (1)

Um modelo linear é definido por uma reta, isto é, uma função do tipo

$$y = f(x) = \beta_0 + \beta_1 x,$$

em que β_0 é chamado de coeficiente linear da reta (a intersecção com o eixo y) e β_1 chamado de coeficiente angular da reta (inclinação). A derivada de f (taxa instantânea de variação de f com respeito a x) é constante e igual a β_1, isto é, $f'(x) = \beta_1$. A segunda derivada de f (taxa instantânea de variação da taxa instantânea de variação de f com respeito a x) é constante e igual a 0 (zero), isto é, $f''(x) = 0$.

Aprendizado (2)

Um modelo quadrático é definido por uma parábola, isto é, uma função do tipo

$$y = f(x) = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2,$$

em que $\beta_0, \beta_1, \beta_2$ *são constantes, com* $\beta_2 \neq 0$. *A derivada de* f *(taxa instantânea de variação de* f *com respeito a* x*) é dada por*

$$f'(x) = \beta_1 + 2\beta_2 x.$$

A segunda derivada de f *(taxa instantânea de variação da taxa instantânea de variação de* f *com respeito a* x*) é dada por*

$$f''(x) = 2\beta_2.$$

Aprendizado (3)

Um modelo polinomial de grau n (um inteiro não negativo) é definido por uma função do tipo

$$y = f(x) = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \cdots + \beta_{n-1} x^{n-1} + \beta_n x^n,$$

em que $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_n$ *são constantes, com* $\beta_n \neq 0$. *A derivada de f (taxa instantânea de variação de f com respeito a x) é dada por*

$$f'(x) = \beta_1 + 2\beta_2 x + 3\beta_3 x^2 + \cdots + (n-1)\beta_{n-1} x^{n-2} + n\beta_n x^{n-1}.$$

A segunda derivada de f (taxa instantânea de variação da taxa instantânea de variação de f com respeito a x) é dada por

$$f''(x) = 2\beta_2 + 3 \cdot 2\beta_3 x + \cdots + (n-1)(n-2)\beta_{n-1} x^{n-3} + n(n-1)\beta_n x^{n-2}.$$

Aprendizado (4)

Um modelo de lei de potência é definido por uma função do tipo

$$y = f(x) = cx^k,$$

em que c e k são constantes. A derivada de f (taxa instantânea de variação de f com respeito a x) é dada por

$$f'(x) = kcx^{k-1}.$$

A segunda derivada de f (taxa instantânea de variação da taxa instantânea de variação de f com respeito a x) é dada por

$$f''(x) = k(k-1)cx^{k-2}.$$

Aprendizado (5)

Um modelo cossenoidal é definido por uma função do tipo

$$y = f(x) = A\cos(kx),$$

em que A e k são constantes. A derivada de f (taxa instantânea de variação de f com respeito a x) é dada por

$$f'(x) = -kA\sin(kx).$$

A segunda derivada de f (taxa instantânea de variação da taxa instantânea de variação de f com respeito a x) é dada por

$$f''(x) = -k^2 A\cos(kx) = -k^2 f(x).$$

Aprendizado (6)

Um modelo senoidal é definido por uma função do tipo

$$y = f(x) = A\sin(kx),$$

em que A e k são constantes. A derivada de f (taxa instantânea de variação de f com respeito a x) é dada por

$$f'(x) = kA\cos(kx).$$

A segunda derivada de f (taxa instantânea de variação da taxa instantânea de variação de f com respeito a x) é dada por

$$f''(x) = -k^2 A\sin(kx) = -k^2 f(x).$$

Referências

[1] James Stewart, “Cálculo”. Vol. 1, Tradução da 9ª edição norte-americana. Editora Cengage Learning.

[2] Hamilton Luiz Guidorizzi, “Um Curso de Cálculo”, Vol. 1, 5ª edição. Editora LTC, 2001.